目　录

第一章　性　质（A）

§1　性　质（A）

单值扩张性（Single valued extension property）是N.Dunford 引入的一个重要概念，迄今这一概念已成为算子理论的重要工具之一。

若 $\lambda\in\rho(T)$，则 $R(\lambda,T)=(\lambda I-T)^{-1}$是 $\rho(T)$ 上的解析函数，对每个 $x\in X$，$R(\lambda,T)x$ 的解析性区域可能比 $\rho(T)$ 大，我们记$R(\lambda,T)x$ 的解析扩张为 $f(\lambda)$，其定义域$D(f)\supseteq\rho(T)$，并且

$$(\lambda I-T)f(\lambda)=x,\quad \lambda\in D(f).$$

显然

$$f(\lambda)=R(\lambda,T)x,\quad \lambda\in\rho(T).$$

确切地说，函数 $f:D(f)\to X$ 是 $D(f)$ 上的解析函数，$D(f)\subseteq\mathbb{C}$是开集，而且

（i）　$D(f)\supseteq\rho(T)$；

（ii）　$(\lambda I-T)f(\lambda)=x$，$\lambda\in D(f)$；

则称 $f(\lambda)$是 $R(\lambda,T)x$ 的解析扩张（analytic extension）。

值得指出，解析扩张不同于解析开拓（analytic continuation），解析扩张后的定义域 $D(f)$ 可能是不连通的。

定义 1.1　称 $R(\lambda,T)x$有**单值扩张性**，若对 $R(\lambda,T)x$ 的两个不同的解析扩张 f,g，必有

$$f(\lambda)=g(\lambda),\quad \lambda\in D(f)\cap D(g).$$

定义 1.2　称 $T\in\mathscr{B}(X)$ **有单值扩张性**（或性质（A）），

若对每个 $x\in X$，$R(\lambda,T)x$ 皆有单值扩张性．一般简称有性质（A）的算子为（A）算子．

定理 1.1 设 $T\in\mathscr{B}(X)$，则下述结论是等价的：

（i） T 有单值扩张性；

(ii) 对任何解析函数 $f:D(f)\to X$，由 $(\lambda I-T)f(\lambda)=0$，必有 $f(\lambda)=0$，$\lambda\in D(f)$，此处 $D(f)\subseteq\mathbb{C}$ 是开集；

(iii) 对任何 $\lambda_0\in\mathbb{C}$，存在 λ_0 之邻域$U(\lambda_0)$，对$U(\lambda_0)$上的任意解析函数 $f(\lambda)$，由$(\lambda I-T)f(\lambda)=0$，必有 $f(\lambda)=0$，$\lambda\in U(\lambda_0)$．

证明 (ii)与(iii) 的等价性是明显的，往证 (i) 与(ii)的等价性．

(ii) $\Longrightarrow$(i)．令$x\in X$，f,g是$R(\lambda,T)x$的两个解析扩张，$D(f)\supseteq\rho(T)$，$D(g)\supseteq\rho(T)$，而且

$$(\lambda I-T)f(\lambda)=x,\quad \lambda\in D(f),$$
$$(\lambda I-T)g(\lambda)=x,\quad \lambda\in D(g).$$

设 $h(\lambda)=f(\lambda)-g(\lambda)$，$\lambda\in D(h)=D(f)\cap D(g)$．显然 $D(h)\supseteq\rho(T)$，$h(\lambda)$ 是 $D(h)$ 上的解析函数，而且

$$(\lambda I-T)h(\lambda)=0,\quad \lambda\in D(h).$$

由(ii)知

$$h(\lambda)=0,\quad \lambda\in D(h).$$

因此

$$f(\lambda)=g(\lambda),\quad \lambda\in D(f)\cap D(g).$$

故(i)成立．

(i) $\Longrightarrow$(ii)．令 f：$D(f)\to X$ 是解析函数，$D(f)\subseteq\mathbb{C}$ 是开集，而且

$$(\lambda I-T)f(\lambda)=0,\quad \lambda\in D(f).$$

不失一般性，可假定 D 是连通的．若 $D(f)\cap\rho(T)\neq\phi$，则存在 $\lambda_0\in D(f)\cap\rho(T)$ 的开圆域 $K(\lambda_0)\subseteq D(f)\cap\rho(T)$，使

$$(\lambda I-T)f(\lambda)=0,\quad \lambda\in K(\lambda_0).$$

由 $K(\lambda_0)\subseteq\rho(T)$ 知，必有 $f(\lambda)=0$，$\lambda\in K(\lambda_0)$。再由解析函数的唯一性定理，得

$$f(\lambda)=0,\ \lambda\in D(f)\cap\rho(T).$$

我们可定义开集 $D(g)=D(f)\cup\rho(T)$ 上的解析函数

$$g(\lambda)=\begin{cases}f(\lambda), & \lambda\in D(f),\\ 0, & \lambda\in\rho(T),\end{cases}$$

则 $D(g)\supseteq\rho(T)$，且有

$$(\lambda I-T)g(\lambda)=0,\ \lambda\in D(g).$$

这样，$g(\lambda)$ 是 $R(\lambda,T)x_0$，$x_0=0$ 的解析扩张；又令 $h(\lambda)=0$，$\lambda\in D(h)=\mathbb{C}$，显然 $h(\lambda)$ 也是 $R(\lambda,T)x_0$，$x_0=0$ 的解析扩张。由 (i)

$$g(\lambda)=h(\lambda),\ \lambda\in D(g)\cap D(h).$$

因此

$$g(\lambda)=0,\ \lambda\in D(g).$$

特别

$$f(\lambda)=0,\ \lambda\in D(f).$$

若 $D(f)\cap\rho(T)=\phi$，亦可仿前证明 $f(\lambda)=0$，$\lambda\in D(f)$。证毕。

若定理 1.1 中的结论 (iii) 仅在某一点 λ_0 处成立，可称 T 在 λ_0 处有单值扩张性。

定理 1.2 $T\in\mathscr{B}(X)$ 在 $\lambda_0=0$ 处无单值扩张性当且仅当存在非零元列 $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$，使

(i) $\|x_n\|\leqslant\rho^n$，$\rho>0$ $\quad(n=0,1,2,\cdots)$；

(ii) $Tx_n=x_{n-1}, x_{-1}=0$ $\quad(n=0,1,2,\cdots)$。

证明 设 T 在 $\lambda_0=0$ 处无单值扩张性，那么存在 $\lambda_0=0$ 之邻域 U 上非零解析函数 $f(\lambda)$，使

$$(\lambda I-T)f(\lambda)=0,\ \lambda\in U.$$

注意

$$f(\lambda)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\lambda^n,\ \lambda\in U,\ a_n\in X(n=0,1,2,\cdots).$$

由上式

$$0=(\lambda I-T)f(\lambda)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\lambda^{n+1}-\sum_{n=0}^{\infty}Ta_n\lambda^n,$$

因此

$$Ta_0=0,\ Ta_{n+1}=a_n\quad(n=0,1,2,\cdots).$$

据 Cauchy 不等式，

$$\|a_n\|\leqslant Mr^{-n}\quad(n=0,1,2,\cdots).$$

此处 r 是 U 的半径，$M>0$是常数。令$\rho=r^{-1}$，$x_n=\dfrac{a_n}{M}$ $(n=0,1,2,\cdots)$，则满足(i)与(ii)的元列存在。

令$\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$是满足(i)与(ii)的非零元列，考虑 $\lambda_0=0$ 之邻域

$$U=\{\lambda\,\big|\,|\lambda|<r<\rho^{-1}\}.$$

又令

$$f(\lambda)=\sum_{n=0}^{\infty}x_n\lambda^n,\ \lambda\in U.$$

注意

$$\|x_n\lambda^n\|<q^n,\quad 0<q=r\rho<1,\ \lambda\in U.$$

因此 $f(\lambda)$ 是 U 上的非零解析函数，又由条件(ii)，

$$(\lambda I-T)f(\lambda)=\sum_{n=0}^{\infty}x_n\lambda^{n+1}-\sum_{n=0}^{\infty}x_n\lambda^{n+1}=0.$$

这说明 T在 $\lambda_0=0$ 处无单值扩张性。证毕。

推论 1 $T\in\mathscr{B}(X)$在 λ_0 处无单值扩张性当且仅当存在非零元列 $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$，使

(i) $\|x_n\|\leqslant\rho^n,\ \rho>0\quad(n=0,1,2,\cdots)$，

(ii) $Tx_n=x_{n-1}+\lambda_0x_n,\ x_{-1}=0\quad(n=0,1,2,\cdots)$.

推论 2 $T\in\mathscr{B}(X)$是非单射的满映射，则 T 无单值扩张

性。

证明 因为 T 是非单映射，可选取 x_0，使 $\|x_0\|=1$，且 $Tx_0=0$. 又 T 是满映射，根据开映射定理，存在常数 $K>0$，对任意 $y\in X$，存在 $x\in X$，使

$$Tx=y,\ \|x\|\leqslant K\|y\|.$$

由归纳法，可选取 x_n，使

$$Tx_n=x_{n-1},\ \|x_n\|\leqslant K\|x_{n-1}\| \quad (n=1,2,\cdots).$$

根据定理 1.2 及定理 1.1 可知 T 无单值扩张性。

例 1.1 无单值扩张性的有界线性算子的例子。

令 X 是单位圆盘 $|z|<1$ 内解析函数 f 在范数

$$\|f\|=\left[\sum_{n=0}^{\infty}|C_n|^2\right]^{\frac{1}{2}},\quad f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}C_nz^n$$

下构成的复 Banach 空间。

定义 X 上有界线性算子 T：

$$(Tf)(z)=\frac{f(z)-f(0)}{z}.$$

令 $e_n=z^n$ $(n=0,1,2,\cdots)$，则对一切 $f\in X$，

$$f=\sum_{n=0}^{\infty}C_ne_n,\ Te_{n+1}=e_n,\ Te_0=0\ (n=0,1,2,\cdots).$$

而且 $\|e_n\|=1$。由定理 1.2 知 T 无单值扩张性。

命题 1.1 若 $T\in\mathscr{B}(X)$ 的谱是疏朗集，则 T 是 (A) 算子.

证明 设 $f: D(f)\to X$ 是解析函数，使

$$(\lambda I-T)f(\lambda)=0,\ \lambda\in D(f).$$

由于 $\sigma(T)$ 是疏朗集，因此对任意 $\lambda_0\in D(f)$，存在 λ_0 之邻域 U 及 U 内一个圆域 K，使 $K\subseteq\rho(T)$。这样

$$(\lambda I-T)f(\lambda)=0,\ \lambda\in K\subseteq\rho(T)\cap D(f).$$

故必有

$$f(\lambda)=0,\ \lambda\in K.$$

从而

$$f(\lambda)=0,\ \lambda\in U.$$

由定理 1.1 可见 T 有单值扩张性。证毕。

命题 1.2 设$T\in\mathscr{B}(X)$是(A)算子，则$\sigma_a(T^*)=\sigma(T^*)$。设 $T^*\in\mathscr{B}(X^*)$ 是 (A) 算子，则 $\sigma_a(T)=\sigma(T)$。此处$\sigma_a(T)$ 表示T 的近似点谱。

证明 令 $\lambda\in\sigma(T)=\sigma(T^*)$，则$\lambda I-T$非满映射。若$\lambda I-T^*$下方有界，则存在常数$M>0$，使

$$\|(\lambda I-T^*)x^*\|\geqslant M\|x^*\|,\ x^*\in X^*.$$

于是$\lambda I-T^*$ 的值域是闭的，而且 $\lambda I-T^*$是单射的，可见 $\lambda I-T^*$ 的零空间仅由零元构成，从而 $\lambda I-T$ 的值域为X，这与 $\lambda I-T$ 非满映射矛盾。故 $\lambda\in\sigma_a(T^*)$，包含关系 $\sigma_a(T^*)\subseteq\sigma(T^*)$ 是显然的。

另一等式证明是类似的。

§2 局 部 谱

若 $T\in\mathscr{B}(X)$是(A)算子，对每个 $x\in X$，$R(\lambda,T)x$ 存在解析扩张，由 Zorn 引理有一个最大的解析扩张，记为 $\tilde{x}(\lambda)$，其定义域记为 $\rho_T(x)$，称为T在 x 处的**局部予解集**。余集$\sigma_T(x)=\rho_T(x)^c$ 称为 T 在 x 处的**局部谱**。显然 $\rho_T(x)\supseteq\rho(T)$，而且

$$\tilde{x}(\lambda)=R(\lambda,T)x,\ \lambda\in\rho(T),$$

$$(\lambda I-T)\tilde{x}(\lambda)=x,\ \lambda\in\rho_T(x).$$

定理 2.1 设$T\in\mathscr{B}(X)$是(A)算子，则

(i) $\sigma_T(x+y)\subseteq\sigma_T(x)\cup\sigma_T(y)$，$x,y\in X$；

(ii) $\sigma_T(\alpha x)=\sigma_T(x)$，$\alpha\in\mathbb{C}$，$\alpha\neq0$，$x\in X$；

(iii) $\sigma_T(x)=\phi$ 当且仅当 $x=0$；

(iv) 若 $TS=ST$，则 $\sigma_T(Sx)\subseteq\sigma_T(x)$，$x\in X$；

(v) $\sigma_T(\tilde{x}(\lambda))=\sigma_T(x)$，$\lambda\in\rho_T(x)$，$x\in X$。

证明 (i) 令 $\lambda\in\rho_T(x)\cap\rho_T(y)$，则

$$(\lambda I-T)\tilde{x}(\lambda)=x;\ (\lambda I-T)\tilde{y}(\lambda)=y;\ \lambda\in\rho_T(x)\cap\rho_T(y).$$

从而

$$(\lambda I-T)[\tilde{x}(\lambda)+\tilde{y}(\lambda)]=x+y,\ \lambda\in\rho_T(x)\cap\rho_T(y).$$

由于 $\tilde{x}(\lambda)+\tilde{y}(\lambda)$ 在 $\rho_T(x)\cap\rho_T(y)$ 上解析，知

$$\rho_T(x)\cap\rho_T(y)\subseteq\rho_T(x+y),$$

所以

$$\sigma_T(x+y)\subseteq\sigma_T(x)\cup\sigma_T(y).$$

(ii) 若 $\lambda\in\rho_T(x)$，则

$$(\lambda I-T)\tilde{x}(\lambda)=x.$$

因此对 $\alpha\in\mathbb{C}$，

$$(\lambda I-T)\alpha\tilde{x}(\lambda)=\alpha x,\ \lambda\in\rho_T(x);$$

所以

$$\lambda\in\rho_T(\alpha x),$$

或者

$$\sigma_T(\alpha x)\subseteq\sigma_T(x).$$

反过来的包含关系可类似地证明。

(iii) 设 $\sigma_T(x)=\phi$，则 $\rho_T(x)=\mathbb{C}$，从而存在整函数 $\tilde{x}(\lambda)$，使得

$$(\lambda I-T)\tilde{x}(\lambda)=x,\ \lambda\in\mathbb{C},$$

又当 $|\lambda|>\|T\|$ 时，$\lambda\in\rho(T)$，而且

$$\tilde{x}(\lambda)=R(\lambda,T)x=\frac{1}{\lambda}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{T}{\lambda}\right)^n x,\ |\lambda|>\|T\|,$$

可见

$$\|\tilde{x}(\lambda)\|\to 0,\qquad 当|\lambda|\to\infty.$$

根据 Liouvill 定理，$\tilde{x}(\lambda)\equiv 0$，所以

$$x=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\lambda|=\|T\|+1}R(\lambda,T)x\,d\lambda$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{|\lambda|=\|T\|+1} \tilde{x}(\lambda)\,d\lambda = 0.$$

反之是明显的。

(iv) 令 $TS=ST$，$\lambda\in\rho_T(x)$，于是存在解析函数 $\tilde{x}(\lambda)$：$\rho_T(x)\to X$，使得

$$(\lambda I-T)\tilde{x}(\lambda)=x,\quad \lambda\in\rho_T(x).$$

令 $\tilde{y}(\lambda)=S\tilde{x}(\lambda)$，由 $TS=ST$，可见

$$(\lambda I-T)\tilde{y}(\lambda)=Sx,\quad \lambda\in\rho_T(x).$$

所以 $\lambda\in\rho_T(Sx)$ 或者 $\sigma_T(Sx)\subseteq\sigma_T(x)$。

(v) 对每个 $\lambda\in\rho_T(x)$，存在解析函数 $g_\lambda(\mu)$：$\rho_T(\tilde{x}(\lambda))\to X$，使得

$$(\mu I-T)g_\lambda(\mu)=\tilde{x}(\lambda),\quad \mu\in\rho_T(\tilde{x}(\lambda)).$$

于是对 $\mu\in\rho_T(\tilde{x}(\lambda))$，

$$(\mu I-T)(\lambda I-T)g_\lambda(\mu)=(\lambda I-T)\tilde{x}(\lambda)=x,$$

可见 $\mu\in\rho_T(x)$。因此

$$\sigma_T(x)\subseteq\rho_T(\tilde{x}(\lambda)).$$

再证相反包含关系。设 $\lambda\in\rho_T(x)$，于是存在解析函数 $\tilde{x}(\lambda)$：$\rho_T(x)\to X$。令

$$g_\lambda(\mu)=\begin{cases}-\dfrac{\tilde{x}(\mu)-\tilde{x}(\lambda)}{\mu-\lambda}, & \mu\neq\lambda,\\ -\tilde{x}'(\lambda), & \mu=\lambda,\end{cases}$$

易见 $g_\lambda(\mu)$：$\rho_T(x)\to X$ 是解析函数，且当 $\mu\neq\lambda$ 时，

$$\begin{aligned}(\mu I-T)g_\lambda(\mu)&=-\frac{x}{\mu-\lambda}+\tilde{x}(\lambda)+\frac{x}{\mu-\lambda}\\&=\tilde{x}(\lambda).\end{aligned}$$

当 $\mu=\lambda$ 时，可从上式取 $\mu\to\lambda$ 得到。这样 $\lambda\in\rho_T(\tilde{x}(\lambda))$，或者 $\rho_T(x)\subseteq\rho_T(\tilde{x}(\lambda))$。

定理 2.2 设 $T\in\mathscr{B}(X)$ 是 (A) 算子．则

$$\sigma(T)=\bigcup_{x\in X}\sigma_T(x).$$

证明 显然 $\sigma_T(x)\subseteq\sigma(T)$，$x\in X$。因此

$$\bigcup_{x\in X}\sigma_T(x)\subseteq\sigma(T).$$

反之，若有 $\lambda_0\in\sigma(T)\setminus\bigcup_{x\in X}\sigma_T(x)$。从 $\lambda_0\notin\bigcup_{x\in X}\sigma_T(x)$ 可知，对每个 $x\in X$，皆有解析函数 $\tilde{x}(\lambda)$：$\rho_T(x)\to X$，使得

$$(\lambda_0 I-T)\tilde{x}(\lambda_0)=x.$$

这样，$\lambda_0 I-T$ 是满映射。又 $\lambda_0\in\sigma(T)$，所以 $\lambda_0 I-T$ 非单射的。由定理 1.2 之推论 2，可见算子 $\lambda_0 I-T$ 无性质 (A)，从而 T 亦无性质 (A)。矛盾。

§3 性质 (A) 的继承性

定理 3.1 设 $T\in\mathscr{B}(X)$，$f:G\to X$ （$G\supseteq\sigma(T)$ 是开集）是解析函数。若 T 是 (A) 算子，则 $f(T)$ 是 (A) 算子；反之，若 $f(T)$ 是 (A) 算子，且 f 在 G 之分支上皆不为常数，则 T 亦是 (A) 算子。

证明 先证明第二个结论。设 T 没有性质 (A)，由定理 1.1 存在非零解析函数 $g:D(g)\to X$，使得

$$(\lambda I-T)g(\lambda)=0,\quad \lambda\in D(g).$$

于是 $D(g)\supseteq\sigma(T)$。不妨设 $D(g)$ 是连通的。对每个 $\lambda\in D(g)$ 做解析函数 $h_\lambda(\mu):G\to\mathbb{C}$，

$$h_\lambda(\mu)=\begin{cases}-\dfrac{f(\mu)-f(\lambda)}{\mu-\lambda}, & \mu\neq\lambda.\\ -f'(\lambda), & \mu=\lambda.\end{cases}$$

于是

$$f(\lambda)-f(\mu)=(\lambda-\mu)h_\lambda(\mu),\quad \lambda\in D(g),\ \mu\in G.$$

由函数演算有

$$f(\lambda)-f(T)=(\lambda I-T)h_\lambda(T),\quad \lambda\in D(g).$$

因此

$$[f(\lambda)I-f(T)]g(\lambda)=0,\ \lambda\in D(g).$$

又 f 在$D(g)\subseteq\sigma(T)$的每个分支上不为常数，存在$\lambda_0\in D(g)$，使$f'(\lambda_0)\neq 0$；存在 λ_0 的邻域U，使 f^{-1} 在 $f(U)$ 上存在。这样复合函数 $g\circ f^{-1}$ 在 $f(U)$ 上解析，而且

$$[\mu I-f(T)](g\circ f^{-1})(\mu)=0,\ \mu\in f(U).$$

又 $f(T)$ 有性质(A)，从而

$$(g\circ f^{-1})(\mu)=0,\ \mu\in f(U),$$

因此

$$g(\lambda)=0,\ \lambda\in U.$$

根据解析开拓，$g(\lambda)=0,\lambda\in D(g)$。这与$g$是非零函数相矛盾。

下面证明第一个结论。设 $f(T)$ 无性质 (A)。由定理 1.1 之(ii) 可以知道，存在非零解析函数 $h:D\to X$ (D 是连通的)，使得

$$[\mu I-f(T)]h(\mu)=0,\ \mu\in D.$$

因此 $D\subseteq\sigma(f(T))=f(\rho(T))$。对固定的 $\mu\in D$，方程 $\mu-f(\lambda)=0$，$\lambda\in G$，在$\sigma(T)$ 中仅有有限个零点，且其阶数大于 1 的零点也是方程 $f'(\lambda)=0$，$\lambda\in G$ 的解。故这些阶数大于 1 的零点个数与 μ 无关。令其为 $\hat{\lambda}_1,\cdots,\hat{\lambda}_m$。取开圆盘 D_1 使 $D_1\subseteq D\setminus\bigcup\limits_{i=1}^{m}f(\hat{\lambda}_i)$。于是对任意 $\mu\in D_1$，$\mu-f(\lambda)=0$，$\lambda\in G$，仅有一阶零点，令其为 $\lambda_1(\mu)$，$\cdots$，$\lambda_n(\mu)$。由 Rouché 定理，可适当选取 $G_0\subseteq G$ 且 $G_0\supseteq\sigma(T)$，使存在开圆盘 $D_2\subseteq D_1$，且$\mu\in D_2$. 方程$\mu-f(\lambda)=0$ 存在同样 n 个解 $\lambda_1(\mu)$，$\cdots$，$\lambda_n(\mu)$，且$\lambda_i(\mu)$ $(i=1,\cdots,n)$是μ 的解析函数，于是

$$\mu-f(\lambda)=[\lambda-\lambda_1(\mu)]\cdots[\lambda-\lambda_n(\mu)]g_\mu(\lambda),\ \lambda\in G_0;\ \mu\in D_2,$$

其中$g_\mu(\lambda)\neq 0$ 是解析函数，故 $g_\mu(T)^{-1}\in\mathscr{B}(X)$。因此

$$\mu I-f(T)=[T-\lambda_1(\mu)I]\cdots[T-\lambda_n(\mu)]g_\mu(T).$$

这样

$$0=[\mu I-f(T)]h(\mu)$$

$$=[T-\lambda_1(\mu)I]\cdots[T-\lambda_n(\mu)I]g_\mu(T)h(\mu),\quad \mu\in D_2.$$

注意$\lambda_i(\mu)$ $(i=1,\cdots,n)$皆非常数，故存在$\mu_1^0\in D_2$，使得$\lambda_1'(\mu_1^0)\neq 0$，于是存在开圆盘$D_1^0$，使在其上存在$\lambda_1^{-1}$。这样

$$(T-\lambda I)[(T-\lambda_2(\lambda_1^{-1}(\lambda))I]\cdots(T-\lambda_n(\lambda_1^{-1}(\lambda))I)]$$
$$h(\lambda_1^{-1}(\lambda))=0,\quad \lambda\in D_1^0.$$

由于T是(A)算子，故

$$[T-\lambda_2(\lambda_1^{-1}(\lambda))I]\cdots[T-\lambda_n(\lambda_1^{-1}(\lambda))I]h(\lambda_1^{-1}(\lambda))=0,$$
$$\lambda\in D_1^0.$$

重复上述讨论可证明$h(\lambda_n^{-1}(\lambda))=0$，$\lambda\in D_n^0$。由解析函数唯一性定理，$h(\mu)=0$，$\mu\in D$。矛盾。定理证毕。

定理 3.2 （局部谱写像定理）设$T\in\mathscr{B}(X)$是(A)算子，$f:G\to X$是解析函数（$G\supseteq\sigma(T)$是开集），则

$$f(\sigma_T(x))=\sigma_{f(T)}(x),\quad x\in X.$$

证明 首先证明$f(\sigma_T(x))\subseteq\sigma_{f(T)}(x)$。令$\mu_0\in f(\sigma_T(x))$，但是$\mu_0\notin\sigma_{f(T)}(x)$（即$\mu_0\in\rho_{f(T)}(x)$），因此存在$\lambda_0\in\sigma_T(x)$，使得$\mu_0=f(\lambda_0)$。同时有$\lambda_0$之开圆盘$U_0$，使得

$$f(U_0)\subseteq\rho_{f(T)}(x).$$

于是

$$[\mu I-f(T)]\tilde{x}(\mu)=x,\quad \mu\in f(U_0),$$

亦即

$$[f(\lambda)I-f(T)]\tilde{x}(f(\lambda))=x,\quad \lambda\in U_0.$$

注意若f是常数，定理自然成立。不妨设f非常数，则$f(\lambda)$在U_0上非常数，我们可定义函数$g:U_0\times U_0\to\mathbb{C}$，使得

$$g_\lambda(\mu)=\begin{cases}\dfrac{f(\lambda)-f(\mu)}{\lambda-\mu}, & \mu\neq\lambda\\ f'(\lambda), & \mu=\lambda\end{cases}$$

是解析的。由函数演算

$$f(\lambda)I-f(T)=(\lambda I-T)g_\lambda(T),$$

从而

$$[f(\lambda)I-f(T)]\tilde{x}(f(\lambda))=(\lambda I-T)g_\lambda(T)\tilde{x}(f(\lambda))$$

$$= x,\quad \lambda \in U_0.$$

注意$g_\lambda(T)\tilde{x}(f(\lambda))$在$\lambda_0$附近解析，因此$\lambda_0 \in \rho_T(x)$，矛盾，所以

$$f(\sigma_T(x)) \subseteq f\sigma_{(T)}(x).$$

再证相反的包含关系。令$\mu_0 \in \sigma_{f(T)}(x)$，而$\mu_0 \notin f(\sigma_T(x))$，从而存在$\mu_0$及$f(\sigma_T(x))$之邻域$U_0$及$V$，使$U_0 \cap V = \phi$。取$\sigma_T(x)$的邻域$W$，使得

$$f(W) \subseteq V.$$

又Γ是W中围绕$\sigma_T(x)$的 Jordan 曲线，则$f(\Gamma) \subseteq V$。这样

$$\mu - f(\lambda) \neq 0,\quad \mu \in U_0,\quad \lambda \in W.$$

对前述的$g_\lambda(\mu)$，我们有

$$(\mu I - f(T))\left[\frac{-1}{2\pi i}\int_\Gamma [\mu - f(\lambda)]^{-1}\tilde{x}(\lambda)\,d\lambda\right]$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \tilde{x}(\lambda)\,d\lambda + \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma [f(\lambda) - f(T)][\mu - f(\lambda)]^{-1}\tilde{x}(\lambda)\,d\lambda$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{|\lambda| = \|T\|+1} R(\lambda, T)x\,d\lambda + \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma [\mu - f(\lambda)]^{-1} g_\lambda(T)x\,d\lambda$$

$$= x,\qquad \mu \in V.$$

这里需指出函数

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma [\mu - f(\lambda)]^{-1}\tilde{x}(\lambda)\,d\lambda$$

作为μ的函数在V上是解析的，从而

$$\mu_0 \in \rho_{f(T)}(x).$$

这样

$$\sigma_{f(T)}(x) \subseteq f(\sigma_T(x)).$$

综前所述，

$$\sigma_{f(T)}(x) = f(\sigma_T(x)).$$

命题 3.1 $T_i \in \mathscr{B}(X_i)\ (i = 1, 2)$是$(A)$算子当且仅当$T_1 \oplus T_2 \in \mathscr{B}(X_1 \oplus X_2)$是$(A)$算子。

证明 令 $T_i(i=1,2)$ 有性质 (A)，又令 $f=f_1\oplus f_2:D\to X_1\oplus X_2$ 是解析函数，使得

$$(\lambda I-T_1\oplus T_2)f(\lambda)=0,\ \lambda\in D.$$

于是

$$(\lambda I-T_i)f_i(\lambda)=0,\ \lambda\in D.$$

因此

$$f_i(\lambda)\equiv 0,\ \lambda\in D\quad (i=1,2).$$

故 $f(\lambda)=0$，$\lambda\in D$. 反之，我们假设 $T_1\oplus T_2$ 有性质 (A)，令 $f_i:D\to X\ (i=1,2)$）是解析函数，且

$$(\lambda I-T_i)f_i(\lambda)=0,\ \lambda\in D\quad (i=1,2).$$

于是

$$\begin{aligned}&[\lambda I-T_1\oplus T_2][f_1(\lambda)\oplus f_2(\lambda)]\\ =&(\lambda I-T_1)f_1(\lambda)\oplus(\lambda I-T_2)f_2(\lambda)\\ =&0,\ \lambda\in D.\end{aligned}$$

又 $T_1\oplus T_2$ 有性质 (A)，因此

$$f_1(\lambda)\oplus f_2(\lambda)=0,\ \lambda\in D,$$

从而 $f_i(\lambda)=0$，$\lambda\in D\ (i=1,2)$，故 $T_i(i=1,2)$ 有性质 (A).
证毕.

定义 3.1 $Y\in\mathrm{Lat}\,T$ 称为 T 的解析不变子空间 (analytically invariant subspace)，若对每个解析函数 $f:D\to X$ ($D\subseteq\mathbb{C}$ 是开集) 由 $(\lambda I-T)f(\lambda)\in Y$，必可推出 $f(\lambda)\in Y$，$\lambda\in D$.

定理 3.3 设 $T\in\mathscr{B}(X)$，Y 是 T 的解析不变子空间当且仅当 $T^Y\in\mathscr{B}(X/Y)$ 有性质 (A).

证明 设 T^Y 有性质 (A)，$f:D\to X$ 是解析函数 ($D\subseteq\mathbb{C}$ 是开集)，使得

$$(\lambda I-T)f(\lambda)\in Y,\ \lambda\in D.$$

于是

$$(\lambda\hat{I}-T^Y)\hat{f}(\lambda)=(\lambda I-T)f(\lambda)\hat{}=\hat{0},\ \lambda\in D.$$

又 T^Y 有性质 (A)，故

$$\hat{f}(\lambda)=\hat{0},\quad \lambda\in D.$$

所以，$f(\lambda)\in Y$，$\lambda\in D$。

反之，令 $\hat{f}:D\to\hat{X}=X/Y$ 是解析函数，

而且

$$(\lambda\hat{I}-T^{Y})\hat{f}(\lambda)=\hat{0},\quad \lambda\in D.$$

不失一般性，可令D是连通的．设

$$\hat{f}(\lambda)=\sum_{n=0}^{\infty}\hat{a}_n(\lambda-\lambda_0)^n,\quad \hat{a}_n\in X/Y\qquad(n=0,1,2,\cdots).$$

对每个 n，选取 $a_n\in\hat{a}_n$，且使

$$\|a_n\|\leqslant\|\hat{a}_n\|+1\qquad(n=0,1,2,\cdots).$$

于是

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\|a_n\|^{\frac{1}{n}}\leqslant\overline{\lim_{n\to\infty}}\|\hat{a}_n\|^{\frac{1}{n}}+1,$$

所以

$$f(\lambda)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(\lambda-\lambda_0)^n$$

是 λ_0 之邻域$U\subseteq D$ 内的解析函数．又

$$\hat{f}(\lambda)=\widehat{f(\lambda)}.\quad \lambda\in D,$$

故

$$(\lambda I-T)f(\lambda)\in Y,\quad \lambda\in U.$$

而 Y 是T 的解析不变子空间，所以

$$f(\lambda)\in Y,\quad \lambda\in U.$$

由解析开拓，

$$\hat{f}(\lambda)=\hat{0},\quad \lambda\in D.$$

命题 3.2 若 $T\in\mathscr{B}(X)$，$Y\in\mathrm{Lat}\,T$，又 T 有性质 (A)；则 $T_Y\in\mathscr{B}(Y)$ 有性质(A)，且对任意 $x\in Y$，

$$\sigma_T(x)\subseteq\sigma_{T_Y}(x).$$

证明 若命题不真，由定理1.2之推论1，存在 $\lambda_0\in\mathbb{C}$及非零元列$\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$，使 $y_n\in Y\quad(n=0,1,2,\cdots)$，且

(i) $\|y_n\|\leqslant\rho^n$，$\rho>0\quad(n=0,1,2,\cdots)$，

(ii) $(T_Y-\lambda_0 I)y_n=y_{n-1}$, $y_{-1}=0$ $(n=0,1,2,\cdots)$.

当然$\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$亦是X中的非零元列，满足(i)，(ii)，这又说明T无性质(A)。矛盾。

设$\tilde{x}(\lambda)$是$R(\lambda,T_Y)x$之极大解析扩张，则

$$(\lambda I-T_Y)\tilde{x}(\lambda)=x,\quad \lambda\in\rho_{T_Y}(x).$$

当然$\tilde{x}(\lambda)$亦是X-值解析函数，并且

$$(\lambda I-T)\tilde{x}(\lambda)=x,\quad \lambda\in\rho_{T_Y}(x).$$

可见$\rho_{T_Y}(x)\subseteq\rho_T(x)$，即

$$\rho_T(x)\subseteq\rho_{T_Y}(x).$$

命题 3.3 设$T\in\mathscr{B}(x)$是(A)算子，Y是T之解析不变子空间，则对任意$x\in Y$，

$$\sigma_T(x)=\sigma_{T_Y}(x).$$

证明 设$\tilde{x}(\lambda)$是$R(\lambda,T)x$之极大解析扩张，则

$$(\lambda I-T)\tilde{x}(\lambda)=x,\quad \lambda\in\rho_T(x).$$

因Y是T之解析不变子空间，所以$\tilde{x}(\lambda)\in Y$。于是上式可写成

$$(\lambda I-T_Y)\tilde{x}(\lambda)=x,\quad \lambda\in\rho_T(x).$$

可见$\rho_T(x)\subseteq\rho_{T_Y}(x)$，即

$$\sigma_{T_Y}(x)\subseteq\sigma_T(x).$$

至于相反的包含关系由命题 3.2 可得出。

定理 3.4 $T\in\mathscr{B}(X)$是(A)算子，Y是T的解析不变子空间，则

$$\sigma_T(x)=[\sigma_T(x)\cap\sigma(T_Y)]\cup\sigma_{T^Y}(\hat{x}),$$

$x\in X$，$\hat{x}\in X/Y$，$x\in\hat{x}$。

证明 令$\lambda\in\rho_T(x)$，存在解析函数$x(\lambda):\rho_T(x)\to X$，使得

$$(\lambda I-T)x(\lambda)=x,\quad \lambda\in\rho_T(x),$$

令$\hat{x}(\lambda)=\widehat{x(\lambda)}$，$\lambda\in\rho_T(x)$，是定义于$\rho_T(x)$而取$X/Y$-值的解析函数，于是

$$(\lambda I-T^Y)\hat{x}(\lambda)=\hat{x},\quad \lambda\in\rho_T(x).$$

从定理 3.3 知 T^Y 有性质(A)，故上式说明 $\rho_T(x)\subseteq\rho_{T^Y}(\hat{x})$，或者 $\sigma_{T^Y}(\hat{x})\subseteq\sigma_T(x)$，$x\in\hat{x}$。因此

$$[\sigma_T(x)\cap\sigma(T_Y)]\cup\sigma_{T^Y}(\hat{x})\subseteq\sigma_T(x).$$

另一方面，令 $\lambda\in\rho_{T^Y}(\hat{x})\cap\rho(T_Y)$，从 $\lambda\in\rho_{T^Y}(\hat{x})$ 知存在解析函数 $\hat{x}(\lambda):\rho_{T^Y}(\hat{x})\to X/Y$，使得

$$(\lambda I-T^Y)\hat{x}(\lambda)=\hat{x},\ \lambda\in\rho_{T^Y}(\hat{x}).$$

这样，有解析函数 $x(\lambda):\rho_{T^Y}(\hat{x})\to X$，使$\widehat{x(\lambda)}=\hat{x}(\lambda)$，$\lambda\in\rho_{T^Y}(\hat{x})$，而且

$$(\lambda I-T)x(\lambda)=x+y(\lambda),\ \lambda\in\rho_{T^Y}(\hat{x}).$$

其中 $y(\lambda)\in Y$，$\lambda\in\rho_{T^Y}(\hat{x})$ 是解析函数。

从 $\lambda\in\rho(T_Y)$可知对 $y(\lambda)\in Y$，存在解析函数

$$z(\lambda)=R(\lambda,T_Y)y(\lambda):\rho(T_Y)\to Y,$$

且

$$(\lambda I-T)x(\lambda)-y(\lambda)=x,\ \lambda\in\rho_{T^Y}(\hat{x})\cap\rho(T_Y).$$

因此

$$(\lambda I-T)[x(\lambda)-z(\lambda)]=x,\ \lambda\in\rho_{T^Y}(\hat{x})\cap\rho(T_Y).$$

可见

$$\rho_{T^Y}(\hat{x})\cap\rho(T_Y)\subseteq\rho_T(x),$$

或者

$$\rho_T(x)\cup[\rho_{T^Y}(\hat{x})\cap\rho(T_Y)]\subseteq\rho_T(x).$$

又 $\rho_T(x)\subseteq\rho_{T^Y}(\hat{x})$，上式可改写为

$$\rho_{T^Y}(\hat{x})\cap[\rho_T(x)\cup\rho(T_Y)]\subseteq\rho_T(x).$$

取余集

$$\sigma_T(x)\subseteq[\sigma_T(x)\cap\sigma(T_Y)]\cup\sigma_{T^Y}(\hat{x}).$$

证毕。

注　　记

单值扩张性 (A) 首先是 N.Dunford[1]于 1954 年引入的。定理 1.1 中 (ii) 是 C.Foias[1] 于1962 年给出的。(iii) 则是

1973 年 J.K.Finch[1] 给出的。目前常用的是 C.Foias 形式，其余两种形式可看作 C.Foias 定义的局部化，一种是关于x局部化，另一种是关于 λ 局部化。这三种定义的等价性证明是我们给出的。从不变子空间问题来看，显然无单值扩张性算子一定有非平凡不变子空间。定理 1.2 的证明见[1]，它对判断无单值扩张性较方便。例 1.1 是 S.Kakutani[1] 的著名例子，而原证较繁，这里的证明是我们给出的。

局部谱概念与定理 2.1 是属于 N.Dunford[1]的。定理2.2是 R.C.Sine[1]于 1964年证明的。定理 3.1 是 I.Colojoara 与 C.Foias[2]给出的。定义 3.1 及定理 3.3 是 S.Frunza[1] 引入并建立的。

局部谱写像定理则是 C. Apostol[1] 及R. G. Bartle 与 C.A.Kariotis[1] 分别于 1968 年和 1973 年证明的。

定理 3.4 是 S.Frunza[1]的推广。

第二章 性 质(AC)

§1 谱极大空间

定义 1.1 $Y\in \text{Lat}T$ 称为 T 的**谱极大空间** (Spectral maximal space)，若对任何 $Z\in\text{Lat}T$，由 $\sigma(T|Z)\subseteq\sigma(T|Y)$；可推出 $Z\subseteq Y$.

命题 1.1 $T\in\mathscr{B}(X)$的谱极大空间皆是T的超不变子空间.

证明 设 Y 是 T 的谱极大空间，$ST=TS$。令$\lambda\in\rho(S)$，$Y_\lambda=R(\lambda,S)Y$. 由 $TR(\lambda,S)=R(\lambda,S)T$，可知 $TY_\lambda\subseteq Y_\lambda$. 还有，对于 $\mu\in\rho(T|Y)$

$$(\mu I-T)|Y_\lambda=(\mu I-T)|R(\lambda,S)Y=R(\lambda,S)(\mu I-T|Y)|Y.$$

因此

$$\sigma(T|Y_\lambda)=\sigma(T|Y)$$

而 Y 是 T 的谱极大空间，故 $Y_\lambda\subseteq Y$. 这样，对每个 $x\in Y$，$R(\lambda,S)x\in Y$. 再由函数演算

$$Sx=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\lambda R(\lambda,S)xd\lambda\in Y,\quad x\in Y$$

可知命题 1.1 成立，此处Γ是围绕$\sigma(S)$的允许围道.

命题 1.2 $T\in\mathscr{B}(X)$ 是(A) 算子，则 T 的谱极大空间皆为 T 的解析不变子空间.

证明 令 Y 是 T 的谱极大空间，$f:D\to X$ 是解析函数，使

$$(\lambda I-T)f(\lambda)\in Y,\quad \lambda\in D.$$

不失一般性可以假定 D 是连通的. 如果$D\cap\rho(T|Y)\neq\phi$，令 $g(\lambda)=(\lambda I-T)f(\lambda)$，$\lambda\in D\cap\rho(T|Y)$，则 $g(\lambda)\in Y$. 于是

$$g(\lambda)=(\lambda I-T)R(\lambda,T|Y)g(\lambda),\quad \lambda\in D\cap\rho(T|Y).$$

由于 T 有性质(A)，故

$$f(\lambda)=R(\lambda,T|Y)g(\lambda)\in Y,\quad \lambda\in D\cap\rho(T|Y).$$

由解析开拓，$f(\lambda)\in Y,\lambda\in D$. 所以我们可以假定$D\subseteq\sigma(T|Y)$.

若命题不真，存在 $\lambda_0\in D$，使 $f(\lambda_0)\notin Y$. 令

$$Z_{\lambda_0}=\{z|z=y+\alpha f(\lambda_0),\ y\in Y,\ \alpha\in\mathbb{C}\}.$$

易见 Z_{λ_0} 是 X之闭线性子空间，而且对 $z\in Z_{\lambda_0}$，

$$\begin{aligned}Tz&=Ty+\alpha Tf(\lambda_0)\\&=[Ty-\alpha(\lambda_0-T)f(\lambda_0)]+\alpha\lambda_0 f(\lambda_0)\in Z_{\lambda_0}.\end{aligned}$$

故 $Z_{\lambda_0}\in\mathrm{Lat}\,T$.

下面证明 $\sigma(T|Z_{\lambda_0})\subseteq\sigma(T|Y)$. 为此设$\lambda\in\rho(T|Y)$.如果

$$\begin{aligned}0&=(\lambda I-T)z\\&=(\lambda I-T)(y+\alpha f(\lambda_0))\\&=[(\lambda I-T)y+\alpha(\lambda_0-T)f(\lambda_0)]+\alpha(\lambda-\lambda_0)f(\lambda_0).\end{aligned}$$

由于 $\lambda\neq\lambda_0$，$f(\lambda_0)\notin Y$，必有 $\alpha=0$，于是

$$(\lambda I-T)y=0.$$

可见 $y=0$，从而 $z=0$. 这说明$(\lambda I-T)|Z_{\lambda_0}$ 是单射的.

令 $z\in Z_{\lambda_0}$，$z=y+\alpha f(\lambda_0)$，取

$$y_0=R(\lambda,T|Y)\left[y-\frac{\alpha}{\lambda-\lambda_0}(\lambda_0-T)f(\lambda_0)\right]\in Y,$$

$$\alpha_0=\frac{\alpha}{\lambda-\lambda_0}\in\mathbb{C},$$

则 $z_0=y_0+\alpha_0 f(\lambda_0)\in Z_{\lambda_0}$满足等式

$$(\lambda I-T)z_0=z.$$

这说明$(\lambda I-T)|Z_{\lambda_0}$是满射的，故 $\lambda\in\rho(T|Z_{\lambda_0})$. 总之

$$\sigma(T|Z_{\lambda_0})\subseteq\sigma(T|Y).$$

由 Y 是 T 之谱极大空间可知，$Z_{\lambda_0}\subseteq Y$. 从而 $f(\lambda_0)\in Y$. 矛盾. 证毕.

推论 $T\in\mathscr{B}(X)$是(A)算子，Y是T的谱极大空间，则

$$\sigma_T(y)=\sigma_{T|Y}(y),\quad y\in Y.$$

命题 1.3 设$T\in\mathscr{B}(X)$是(A)算子，$\{Y_\alpha\}_{\alpha\in\mathscr{A}}$是$T$的谱极大空间族，则$Y=\bigcap\limits_{\alpha\in\mathscr{A}}Y_\alpha$亦是$T$的谱极大空间。

证明 令$Z\in\operatorname{Lat}T$，$\sigma(T|Z)\subseteq\sigma(T|Y)$。因为$Y_\alpha$是$T$的解析不变子空间，不难看出，$Y$亦是$T_\alpha$的解析不变子空间，此处$T_\alpha=T|Y_\alpha$，$\alpha\in\mathscr{A}$。对$\lambda\in\rho(T_\alpha)$，$y\in Y$，令$y_\alpha(\lambda)=R(\lambda,T_\alpha)y$，它是从$\rho(T_\alpha)$到$X$的解析函数，而且$(\lambda I-T)y_\alpha(\lambda)=y\in Y$，又$Y$是$T$的解析不变子空间，故$y_\alpha(\lambda)\in Y$，$\lambda\in\rho(T_\alpha)$，$\alpha\in\mathscr{A}$，或者$R(\lambda,T_\alpha)y\in Y$，$\lambda\in\rho(T_\alpha)$，$\alpha\in\mathscr{A}$。因此，$R(\lambda,T_\alpha)Y\subseteq Y$，$\lambda\in\rho(T_\alpha)$，$\alpha\in\mathscr{A}$。

若$\lambda\in\rho(T|Y_\alpha)$，则$(\lambda I-T_\alpha)|Y$必是单射的，又对每个$y\in Y$，存在$x\in Y_\alpha$，使得

$$y=(\lambda I-T_\alpha)x.$$

因此

$$x=R(\lambda,T_\alpha)y\in Y,$$

从而$(\lambda I-T_\alpha)|Y$是满射的。这样

$$\begin{aligned}\rho(T|Y_\alpha)=\rho(T_\alpha)&\subseteq\rho(T_\alpha|Y)\\&=\rho(T|Y),\quad\alpha\in\mathscr{A}.\end{aligned}$$

所以

$$\sigma(T|Z)\subseteq\sigma(T|Y)\subseteq\sigma(T|Y_\alpha),\quad\alpha\in\mathscr{A}.$$

又$Y_\alpha(\alpha\in\mathscr{A})$是$T$的谱极大空间，这样

$$Z\subseteq Y_\alpha,\quad\alpha\in\mathscr{A}.$$

从而$Z\subseteq Y$。证毕。

§2 闭 性 (C)

本节均设$T\in\mathscr{B}(X)$是(A)算子。我们可考虑X的线性

流形

$$X_T(\sigma)=\{x|\sigma_T(x)\subseteq\sigma\},\ \sigma\subseteq\mathbb{C}.$$

由第一章定理2.1知，$X_T(\sigma)$ 是 T 的超不变的线性流形，一般它不一定是闭的。

例 2.1 令 $X=\bigoplus_{n=2}^{\infty}\mathbb{C}^n$，$T=\bigoplus_{n=2}^{\infty}Q_n$，此处 Q_n 是 Jordan 算子，其矩阵表示为

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \mathbf{0} \\ & 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ & \mathbf{0} & & & 0 \end{pmatrix}_{n\times n}.$$

注意 $\|Q_n\|=1$ 且 $Q_n^n=0$，因此

$$\|T\|=\sup_{2\leqslant n}\|Q_n\|=1.$$

又令 $G\subseteq\mathbb{C}$ 是开集，$f=\bigoplus_{n=2}^{\infty}f_n:G\to X$ 是解析函数，使得 $(\lambda I-T)f(\lambda)\equiv0$。于是

$$(\lambda I_n-Q_n)f_n(\lambda)\equiv0\quad(n\geqslant2),$$

从而

$$0=Q_n^nf_n(\lambda)=\lambda^nf_n(\lambda).$$

因此 $f_n(\lambda)\equiv0$，故 $f(\lambda)\equiv0$，即 T 有单值扩张性.另一方面，$\|T^p\|=1(p=1,2,\cdots)$，

$$\lim_{p\to\infty}\|T^p\|^{\frac{1}{p}}=1.$$

可见 $\sigma(T)\cap\{\lambda\,\big|\,|\lambda|=1\}\neq\phi$，故 $\sigma(T)\neq\{0\}$。而 $Y_m=\bigotimes_{n=2}^{m}\mathbb{C}^n$ $(m=2,3,\cdots)$ 是包含于流形 $X_T(\{0\})$ 内，若 $X_T(\{0\})$ 是闭的，则

$$X_T(\{0\})\supseteq\bigvee_{m=2}^{\infty}Y_m=X,$$

于是 $X_T(\{0\})=X$ 。这是不可能的，因为可由第一章定理 2.2 导出矛盾。

定义 2.1 设 $T\in\mathscr{B}(X)$ 是 (A) 算子，若对一切 $F\in\mathscr{F}$，线性流形 $X_T(F)$ 都是闭的，则称 T 具有闭性 (C)，简称为 (AC) 算子。

不难证明，若 T 有性质 (A)，则 $\overline{X_T(\sigma)}$ 是 T 的超不变子空间，而 $X_T(\sigma)^{\perp}$ 是 S^* 的不变子空间，其中 $ST=TS$。

定理 2.1 设 $T\in\mathscr{B}(X)$ 是 (A) 算子，则 T 有性质 (C) 当且仅当 $\sigma_T(x)$ 是下半连续的，对任意 $x\in X$。

证明 若 T 有性质 (A)，则

$$\varliminf_{n\to\infty}\sigma_T(x_n)=\{\lambda\,|\,\lambda\in\mathbb{C},\text{存在}\lambda_n\in\sigma_T(x_n),\text{使}\lambda_n\to\lambda\}.$$

因此 $\sigma_T(x)$ 在 x_0 处下半连续，即 $\sigma_T(x_0)=\varliminf_{n\to\infty}\sigma_T(x_n)$。

先证充分性。令 $F\in\mathscr{F}$，需证 $X_T(F)$ 是闭的。令 $x_n\in X_T(F)$，而且 $x_n\to x_0$ $(n\to\infty)$。注意 $\sigma_T(x_n)\subseteq F$ $(n=1,2,\cdots)$，于是对任意 $\lambda\in\sigma_T(x_0)$，存在 $\lambda_n\in\sigma_T(x_n)$，且 $\lambda_n\to\lambda(n\to\infty)$。因此 $\lambda_n\in F(n=1,2,\cdots)$。这样，$\lambda\in F$，所以

$$\sigma_T(x_0)\subseteq F,\quad F\in\mathscr{F},$$

或者

$$x_0\in X_T(F),\quad F\in\mathscr{F}.$$

故 $X_T(F)\,(F\in\mathscr{F})$ 是闭的。

反之，令 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 收敛于 x_0，$\lambda_0\in\sigma_T(x_0)$，但是 $\lambda_0\notin\varliminf_{n\to\infty}\sigma_T(x_n)$。存在 λ_0 的邻域 U 及子列 $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$，使得

$$U\cap\sigma_T(x_{n_k})=\phi\quad(k=1,2,\cdots).$$

令 $F=\overline{\bigcup_{k=1}^{\infty}\sigma_T(x_{n_k})}$，则 $F\in\mathscr{F}$，而且 $x_{n_k}\in X_T(F)$ $(k=1,2,\cdots)$。又 $x_{n_k}\to x_0$，$X_T(F)$ 是闭的，所以 $x_0\in X_T(F)$，因此 $\sigma_T(x_0)\subseteq F$。这样

$$U\cap[\bigcup_{k=1}^{\infty}\sigma_T(x_{n_k})]\neq\phi.$$

矛盾。于是 $\lambda_0\in\underline{\lim}_{n\to\infty}\sigma_T(x_n)$。证毕。

定义 2.2 设 Γ 是光滑的 Jordan 曲线，而且 $\sigma(T)\subseteq\Gamma$。若对每个$\lambda_0\in\sigma(T)$，皆存在两个与 λ_0 无关的常数 $\nu, M>0$，使得

$$\|R(\lambda,T)\|\leqslant\frac{M}{|\lambda-\lambda_0|^{\nu}},$$

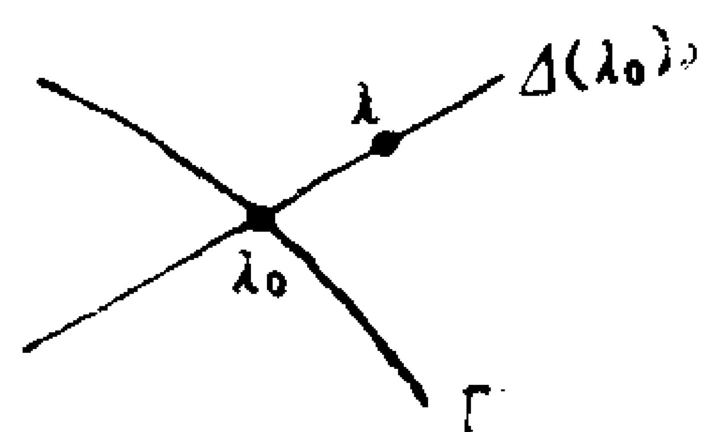


图 1

$\lambda\neq\lambda_0$，$\lambda\in\Delta(\lambda_0)$，则称 T 之预解式有 ν 阶增长阶，这里$\Delta(\lambda_0)$ 表示过 λ_0 的 Γ 的横截线(图 1)，而 ν 是自然数。

命题 2.1 $T\in\mathscr{B}(X)$ 之预解式有 ν 阶增长阶，则 T 是(AC) 算子。

证明 由于$\sigma(T)$ 是疏朗的，据第一章命题 1.1，T有性质(A)。往证 T 有性质 (C)。令 $F\in\mathscr{F}$，

$$X_T(F)=\{x|\sigma_T(x)\subseteq F\}.$$

从 $\sigma(T)\subseteq\Gamma$，有

$$X_T(F)=X_T(F\cap\Gamma).$$

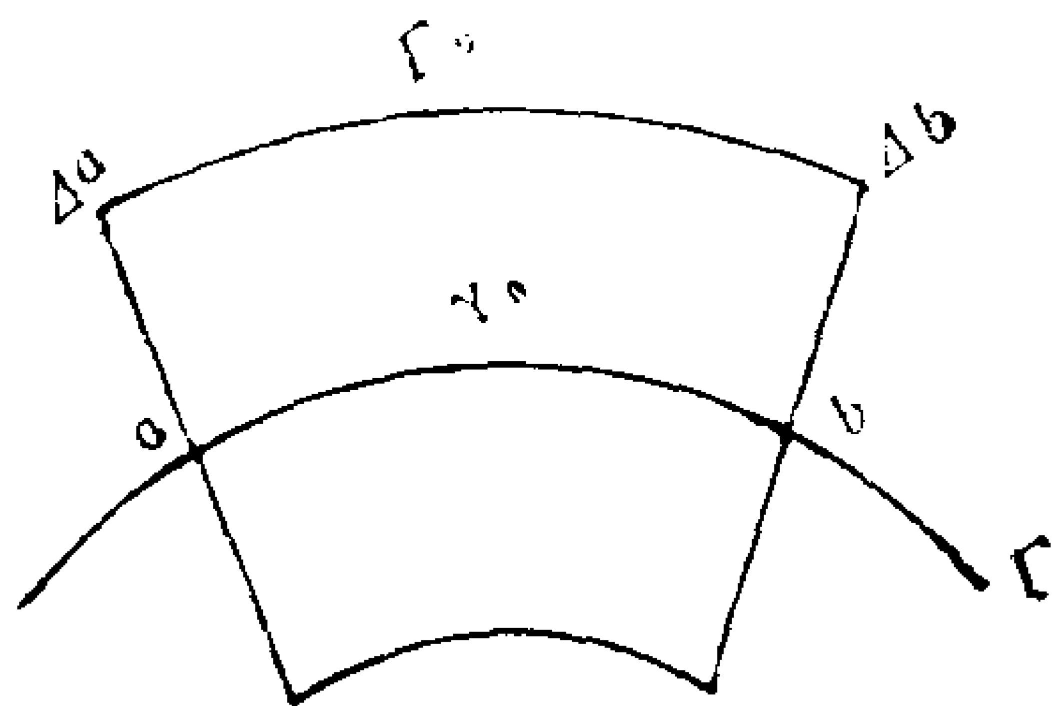


图 2

因此不失一般性，可设 $F\subseteq\Gamma$。于是

$$F=\bigcap_{\alpha\in\mathscr{A}}F_\alpha,$$

其中 $F_\alpha(\alpha\in\mathscr{A})$是 Γ 中一个开子弧在 Γ中的余集。又

$$X_T(F)=\bigcap_{\alpha\in\mathscr{A}}X_T(F_\alpha).$$

这样只须证明 $X_T(F_\alpha)$ $(\alpha\in\mathscr{A})$是闭的，即只须考虑F是Γ中的开弧段 γ 在 Γ中的余集。

令 $x_n\to x$，且 $x_n\in X_T(F)$ $(n=1,2,\cdots)$。需证明 $\gamma\subseteq\rho_T(x)$. 为此只须证$\rho_T(x)$含有 γ 的任意开子弧段 γ_0。令a,b 是 γ_0 的端点。令 Γ_0 是由Δ_a,Δ_b 及连结 Δ_a,Δ_b 端点

的孤构成的 Jordan 曲线(图 2)．由于 T 的预解式有 ν 阶增长阶，存在自然数N，使得

$$\lim_{\substack{\lambda\to a\\ \lambda\in\Gamma_0}}(\lambda-a)^N(\lambda-b)^N\tilde{x}_n(\lambda)=\lim_{\substack{\lambda\to b\\ \lambda\in\Gamma_0}}(\lambda-a)^N(\lambda-b)^N\tilde{x}_n(\lambda)=0,$$

并且关于 n 是一致的．存在 Γ_0 的含有 a,b 的开弧 N_a,N_b，使得 $\tilde{y}_n(\lambda)=(\lambda-a)^N(\lambda-b)^N\tilde{x}_n(\lambda)$，并且

$$\|\tilde{y}_n(\lambda)\|<\frac{\varepsilon}{2},\ n\geqslant 1,\ \lambda\in N_a\cup N_b.$$

又 $x_n\to x$，因此

$$\lim_{n\to\infty}\tilde{y}_n(\lambda)=(\lambda-a)^N(\lambda-b)^N R(\lambda,T)x$$

对 $\Gamma\setminus[N_a\cup N_b]$ 一致成立．于是有自然数 n_0，使得

$$\|\tilde{y}_n(\lambda)-\tilde{y}_m(\lambda)\|<\varepsilon,\ 当\lambda\in\Gamma_0,n,m\geqslant n_0.$$

这样,$\{\tilde{y}_n(\lambda)\}_{n=1}^{\infty}$在 Γ_0 上一致收敛．由最大模原理，它在 Γ_0 上及其内部收敛到一个解析函数 $y(\lambda)$．因为

$$y(\lambda)=\lim_{n\to\infty}\tilde{y}_n(\lambda)=(\lambda-a)^N(\lambda-b)^N x(\lambda),\ \lambda\in\Gamma_0,$$

所以

$$x(\lambda)=\frac{y(\lambda)}{(\lambda-a)^N(\lambda-b)^N}$$

是 $\tilde{x}(\lambda)$ 到 Γ_0 内部的解析开拓．又

$$(\lambda I-T)\tilde{x}(\lambda)=x,\ \lambda\in\Gamma_0\ 内部,$$

$$(\lambda I-T)x(\lambda)=x,\ \lambda\in\Gamma_0\ 内部,$$

于是 Γ_0 内部 $\subseteq\rho_T(x)$，而 $\gamma_0\subseteq\Gamma_0$ 内部，因此 $\gamma_0\subseteq\rho_T(x)$．

定理 2.2 $T\in\mathscr{B}(X)$ 是 (AC) 算子，则对任意 $F\in\mathscr{F}$，$X_T(F)$ 是 T 的谱极大空间，而且

$$\sigma(T|X_T(F))\subseteq F\cap\sigma(T),\ F\in\mathscr{F}.$$

证明 令 $\lambda\in F^c$，$x\in X_T(F)$，于是 $\sigma_T(x)\subseteq F$．由第一章定理 2.1，

$$\sigma_T(\tilde{x}(\lambda))=\sigma_T(x)\subseteq F.$$

因此

$$\tilde{x}(\lambda)\in X_T(F),\ \lambda\in F^c,\ (\lambda I-T)\tilde{x}(\lambda)=x.$$

这说明 $(\lambda I-T)|X_T(F)$ 是满射的，又由第一章命题3.2知，$(\lambda I-T)|X_T(F)$ 亦有性质(A)，再由第一章定理1.2之推论2，$(\lambda I-T)|X_T(F)$ 必是单射的，从而 $\lambda\in\rho(T|X_T(F))$，故

$$\sigma(T|X_T(F))\subseteq F,\ F\in\mathscr{F}.$$

又 $X_T(F)$是 T 的超不变子空间，故

$$\sigma(T|X_T(F))\subseteq\sigma(T).$$

所以

$$\sigma(T|X_T(F))\subseteq F\cap\sigma(T),\ F\in\mathscr{F}.$$

令 $Z\in\mathrm{Lat}\,T$，且 $\sigma(T|Z)\subseteq\sigma(T|X_T(F))$. 对 $y\in Z$，由第一章命题3.2，

$$\sigma_T(y)\subseteq\sigma_{T|Z}(y)\subseteq\sigma(T|Z)\subseteq\sigma(T|X_T(F))\subseteq F,$$

即 $y\in X_T(F)$. 证毕.

命题 2.2 $T\in\mathscr{B}(X)$是(AC)算子，则 T 的任意谱极大空间 Y 可表示成 $X_T(F)$形式，$F=\sigma(T|Y)$.

证明 由定理2.2，$X_T(F)$ 是 T 的谱极大空间. 而且

$$\sigma(T|X_T(F))\subseteq F\cap\sigma(T).$$

但是$F=\sigma(T|Y)$，所以

$$\sigma(T|X_T(F))\subseteq\sigma(T|Y).$$

由此

$$X_T(F)\subseteq Y.$$

另一方面，对任意$y\in Y$，

$$\sigma_T(y)\subseteq\sigma(T|Y)=F^*,$$

所以，$y\in X_T(F)$，这样，

$$Y\subseteq X_T(F).$$

定理 2.3 $T\in\mathscr{B}(X)$，T^*是(AC)算子，则 T^* 的谱极大空间是弱* 闭的.

证明 设Y^*是 T^* 的谱极大空间，由命题2.2，

$$Y^* = X^*_{T^*}(F),\ F = \sigma(T^*|Y^*).$$

令 $S = \{x^* | x^* \in X^*,\ \|x^*\| \leqslant 1\}$。对正数 a，令

$$Y^*_a = X^*_{T^*}(F) \cap aS.$$

为证明 Y^* 是弱*闭的，由 Krein-Smulian 定理，只须证明每个 Y^*_a 是弱*闭的。

设 $\{y^*_\alpha\}_{\alpha \in \mathscr{A}} \subseteq Y^*_a$，$y^*_\alpha \xrightarrow{W^*} y^*$。由于 $\|y^*_\alpha\| \leqslant a$，所以 $\|y^*\| \leqslant a$，即 $y^* \in aS$。下面证明 $y^* \in X^*_{T^*}(F)$。

因为任给 $\lambda \in F^c$，$\lambda \in \rho(T^*|X^*_{T^*}(F))$，

$\|R(\lambda, T^*|X^*_{T^*}(F))y^*_\alpha\| \leqslant a\|R(\lambda, T^*|X^*_{T^*}(\mathrm{F})\|$，$\alpha \in \mathscr{A}$，

根据 Alaoglu 定理，$\{R(\lambda, T^*|X^*_{T^*}(F))y^*_\alpha\}_{\alpha \in \mathscr{A}}$ 必有弱*聚点。现在我们证明这个聚点是唯一的。

设 x^*_{01}，x^*_{02} 是 $\{R(\lambda, T^*|X^*_{T^*}(F))y^*_\alpha\}_{\alpha \in \mathscr{A}}$ 之任意两个弱*聚点。于是存在两个子链

$$\{\mathrm{R}(\lambda, T^*|X^*_{T^*}(F))\, y^*_{\alpha_i}\}_{\alpha_i \in \mathscr{A}_i}\ (i = 1, 2)$$

使得

$$R(\lambda, T^*|X^*_{T^*}(F))y^*_{\alpha_i} \xrightarrow{W^*} x^*_{0i}\ (i = 1, 2).$$

则

$$y^*_{\alpha_i} = (\lambda - T^*)R(\lambda, T^*|X^*_{T^*}(F))y^*_\alpha$$

$$\xrightarrow{W^*} (\lambda - T^*)x^*_{0i} \quad (i = 1, 2).$$

而 $\{y^*_{\alpha_i}\}_{\alpha_i \in \mathscr{A}_i}$ $(i = 1, 2)$ 是 $\{y^*_\alpha\}_{\alpha \in \mathscr{A}}$ 之子链，故有 $y^*_{\alpha_i} \xrightarrow{W^*} y^*$。

由弱*极限唯一性，

$$(\lambda - T^*)x^*_{01} = (\lambda - T^*)x^*_{02} = y^*.$$

设 $x^*_0 = x^*_{01} - x^*_{02}$，则

$$(\lambda - T^*)x^*_0 = 0.$$

如果 $x^*_0 \neq 0$，令 $\mathscr{A}_1 \times \mathscr{A}_2$ 表示如下定义的部分序集：

$$(\alpha_1,\alpha_2)\in\mathscr{A}_1\times\mathscr{A}_2,$$
$$(\alpha_1,\alpha_2)>(\beta_1,\beta_2),\text{当}\alpha_i>\beta_i\ (i=1,2),$$
又令 $z^*_{(\alpha_1,\alpha_2)}=y^*_{\alpha_1}-y^*_{\alpha_2}$，则

$$R(\lambda,T^*|X^*_{T^*}(F))z^*_{(\alpha_1,\alpha_2)}\xrightarrow{W^*}x^*_0.$$

而当$(\alpha_1,\alpha_2)\in\mathscr{A}_1\times\mathscr{A}_2$,

$$\begin{aligned}&\|R(\lambda,T^*|X^*_{T^*}(F))^2z^*_{(\alpha_1,\alpha_2)}\|\\ \leqslant&\|R(\lambda,T^*|X^*_{T^*}(F))\|^2\|y^*_{\alpha_1}-y^*_{\alpha_2}\|\\ \leqslant&2a\|R(\lambda,T^*|X^*_{T^*}(F))\|^2.\end{aligned}$$

所以

$$\{R(\lambda,T^*|X^*_{T^*}(F))^2z^*_{(\alpha_1,\alpha_2)}\}_{(\alpha_1,\alpha_2)\in\mathscr{A}_1\times\mathscr{A}_2}.$$

必有弱*收敛子链

$$\{R(\lambda,T^*|X^*_{T^*}(F))^2z^*_{(\beta_1\beta_2)}\}_{(\beta_1\beta_2)\in\mathscr{B}_1\times\mathscr{B}_2}.$$

设

$$R(\lambda,T^*|X^*_{T^*}(F))^2z^*_{(\beta_1,\beta_2)}\xrightarrow{W^*}x^*_1,$$

则

$$\|x^*_1\|\leqslant2a\|R(\lambda,T^*|X^*_{T^*}(F))\|^2,$$

且

$$(\lambda-T^*)x^*_1=x^*_0.$$

再考察子链$\{R(\lambda,T^*|X^*_{T^*}(F))^3z^*_{(\beta_1,\beta_2)}\}_{(\beta_1,\beta_2)\in\mathscr{B}_1\times\mathscr{B}_2}$.
我们又得到$x^*_2\in X^*$. 总之由归纳法不难得到$x^*_n\in X^*(n=1,2\cdots)$，使

$$\|x^*_n\|\leqslant2a\|R(\lambda,T^*|X^*_{T^*}(F))\|^{n+1},$$

且

$$(\lambda-T^*)x^*_n=x^*_{n-1}.$$

类似第一章定理1.2，可以证明T^*无单值扩张性，与假设矛盾。所以必有 $x^*_0=0$，即$\{R(\lambda,T^*|X^*_{T^*}(F))y^*_\alpha\}_{\alpha\in\mathscr{A}}$有唯一的弱*聚点。

对每个 $\lambda\in F^c$，定义 $y^*(\lambda)$ 为 $\{R(\lambda,T^*|X^*_{T^*}(F))y^*_\alpha\}_{\alpha\in\mathscr{A}}$ 之唯一的弱*聚点。则 $y^*(\lambda)$ 是 F^c 上的 X^*-值函数，且

$$(\lambda-T^*)y^*(\lambda)=y^*,\quad \lambda\in F^c$$

对于任意一列 $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}\subseteq\mathbf{C}$，$\lambda_n\to\lambda_0\in F^c$。任给 $\varepsilon>0$，由于 $R(\lambda,T^*|X^*_{T^*}(F))$ 是 F^c 上之 $B(X^*_{T^*}(F))$-值解析函数，存在充分大自然数 N，当 $n,m\geqslant N$ 时。

$$\left\|\frac{R(\lambda_n,T^*|X^*_{T^*}(F))-R(\lambda_0,T^*|X^*_{T^*}(F))}{\lambda_n-\lambda_0}-\frac{R(\lambda_m,T^*|X^*_{T^*}(F))-R(\lambda_0,T^*|X^*_{T^*}(F))}{\lambda_m-\lambda_0}\right\|<\frac{\varepsilon}{a},$$

于是对所有 $y^*_\alpha(\alpha\in\mathscr{A})$ 及任意 $x\in X(\|x\|<1)$ 都有

$$\left|\frac{(x,R(\lambda_n,T^*|X^*_{T^*}(F))y^*_\alpha)-(x,R(\lambda_0,T^*|X^*_{T^*}(F))y^*_\alpha)}{\lambda_n-\lambda_0}-\frac{(x,R(\lambda_m,T^*|X^*_{T^*}(F))y^*_\alpha)-(x,R(\lambda_0,T|X^*_{T^*}(F))y^*_\alpha)}{\lambda_m-\lambda_0}\right|<\varepsilon.$$

取弱*极限可得

$$\left|\frac{(x,y^*(\lambda_n))-(x,y^*(\lambda_0))}{\lambda_n-\lambda_0}-\frac{(x,y^*(\lambda_m))-(x,y^*(\lambda_0))}{\lambda_m-\lambda_0}\right|\leqslant\varepsilon.$$

而 $x\in X(\|x\|\leqslant1)$ 是任意的，所以有

$$\left\|\frac{y^*(\lambda_n)-y^*(\lambda_0)}{\lambda_n-\lambda_0}-\frac{y^*(\lambda_m)-y^*(\lambda_0)}{\lambda_m-\lambda_0}\right\|\leqslant\varepsilon,n,m\geqslant N.$$

这说明 $y^*(\lambda)$ 在 λ_0 处解析。因 $\lambda_0\in F^c$ 可以是任意的，所以 $y^*(\lambda)$ 是 F^c 上 X^*-值解析函数，故

$$\sigma_{T^*}(y^*)\subseteq F,$$

即 $y^*\in X^*_{T^*}(F)$。证毕。

定理 2.4 $T\in\mathscr{B}(X)$ 是 (AC) 算子，又 $F_1\cap F_2=\phi$，$F_i\in\mathscr{F}$

$(i=1,2)$，则

$$X_T(F_1\cup F_2)=X_T(F_1)\oplus X_T(F_2).$$

证明 令

$$Y=X_T(F_1\cup F_2),\quad Y_i=X_T(F_i)\ (i=1,2),$$

由定理 2.2，Y，$Y_i\,(i=1,2)$皆是谱极大空间，而且

$$\sigma(T|Y)\subseteq F_1\cup F_2.$$

又令 $\tau_i=F_i\cap\sigma(T|Y)$ 是谱集合，由函数演算，定义射影算子

$$E_i=E(\tau_i)\quad (i=1,2).$$

从而

$$Y=E_1Y\oplus E_2Y.$$

令 $y\in Y_i$，又Y_i皆T之超不变子空间，因此

$$\sigma_T(y)\subseteq\sigma_{T|Y_i}(y)\subseteq\sigma(T|Y_i).$$

又 $y\in Y$，故由命题 1.2

$$\sigma_{T|Y}(y)=\sigma_T(y)\subseteq F_i\cap\sigma(T|Y)=\tau_i.$$

从而 $y\in E_iY$. 这样

$$Y_i\subseteq E_iY\quad (i=1,2).$$

反之，若 $y\in E_iY$，则由定理 2.2

$$\sigma_T(y)\subseteq\sigma(T_Y|E_iY)\subseteq\tau_i\subseteq F_i.$$

因此，$y\in Y_i$. 换言之

$$E_iY\subseteq Y_i\quad (i=1,2).$$

所以

$$Y_i=E_iY\quad (i=1,2).$$

故

$$Y=Y_1\oplus Y_2.$$

证毕.

命题 2.3 $T\in\mathscr{B}(X)$是(AC)算子，则

$$X_T(\{0\})=\{x\mid \lim_{n\to\infty}\|T^n x\|^{\frac{1}{n}}=0\}.$$

证明 于$\{0\}\in\mathscr{F}$，令

$$T_0=T|X_T(\{0\}).$$

因为

$$\sigma(T_0)=\sigma(T|X_T(\{0\}))\subseteq\{0\},$$

所以$\sigma(T_0)=\{0\}$. 亦即T_0是$X_T(\{0\})$上的拟幂零算子，故

$$\lim_{n\to\infty}\|T_0^n\|^{\frac{1}{n}}=0.$$

于是对每个$x\in X_T(\{0\})$，

$$\|T^nx\|^{\frac{1}{n}}\leqslant\|T_0^nx\|^{\frac{1}{n}}\leqslant\|x\|^{\frac{1}{n}}\|T_0^n\|^{\frac{1}{n}}\to 0.$$

因此，$x\in\{x|\lim\limits_{n\to\infty}\|T^nx\|^{\frac{1}{n}}=0\}$.

反之，令$\lim\limits_{n\to\infty}\|T^nx\|^{\frac{1}{n}}=0$，则级数

$$\tilde{x}(\lambda)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{T^nx}{\lambda^{n+1}}$$

的收敛半径无穷大，因此$\tilde{x}(\lambda)$对$\lambda\neq0$收敛. 注意，当$|\lambda|>\|T\|$时，

$$\tilde{x}(\lambda)=R(\lambda,T)x,$$

因此可把$R(\lambda,T)x$解析开拓为$\tilde{x}(\lambda)$，故

$$(\lambda I-T)\tilde{x}(\lambda)=x,\ \lambda\neq0.$$

这样

$$\{0\}^c\subseteq\rho_T(x)，或者\ \sigma_T(x)\subseteq\{0\},$$

所以

$$x\in X_T(\{0\}).$$

证毕.

§3 谱极大空间与谱

命题 3.1 $T\in\mathscr{B}(X)$是(AC)算子，则对任何$F\in\mathscr{F}$，

(i) 若 $X_T(F)\neq\{0\}$，则 $F\cap\sigma(T)\neq\phi$；

(ii) 若 $X_T(F)=\{0\}$，则 $F\cap\sigma_p(T)=\phi$。

证明 (i) 若 $F\cap\sigma(T)=\phi$，由定理 2.2，

$$\sigma(T|X_T(F))\subseteq F\cap\sigma(T)=\phi,$$

从而 $X_T(F)=\{0\}$。矛盾。

(ii) 若 $F\cap\sigma_p(T)\neq\phi$，则存在 $\lambda_0\in F\cap\sigma_p(T)$。令 $T_0=\lambda_0 I-T$，根据谱写像定理。$0\in\sigma_p(T_0)$。又 T_0 是(*AC*) 算子，由命题 2.3，

$$X_{T_0}(\{0\})\neq\{0\}.$$

不难验证，对任何 $\sigma\in\mathscr{F}$，

$$X_{T_0}(\sigma)=X_T(\{\lambda_0-\sigma\}),$$

其中 $\{\lambda_0-\sigma\}=\{\lambda_0-\lambda|\lambda\in\sigma\}$。因此

$$X_{T_0}(\{0\})=X_T(\{\lambda_0\}).$$

这说明

$$X_T(\{\lambda_0\})\neq\{0\}.$$

故

$$X_T(F)\supseteq X_T(\{\lambda_0\})\neq\{0\}.$$

定义 3.1 $T_i\in\mathscr{B}(X_i)$ $(i=1,2)$，称 T_1 是 T_2 的拟仿射变换(quasiaffine transformation)，若存在 $A\in\mathscr{B}(X_1,X_2)$，使 A 是可逆的，且 A^{-1} 稠定义，又成立等式

$$T_1=A^{-1}T_2A.$$

定义 3.2 $T_i\in\mathscr{B}(X_i)$ $(i=1,2)$，而且 T_1 与 T_2 互为拟仿射变换，则称 T_1 和 T_2 是拟相似的 (quasisimilar)。

命题 3.2 $T_i\in\mathscr{B}(X_i)$ $(i=1,2)$ 是 (*AC*)算子，而且 T_1 是 T_2 的拟仿射变换，则对拟仿射算子 $A\in\mathscr{B}(X_1,X_2)$ 成立。

$$AX_{1T_1}(F)\subseteq X_{2T_2}(F),\ F\in\mathscr{F}.$$

证明 令 $x\in X_{1T_1}(F)$，则 $F^c\subseteq\rho_{T_1}(x)$，因此存在定义在 F^c 上 X_1-值解析函数 f_1，使得

$$(\lambda I_1-T_1)f_1(\lambda)=x,\ \lambda\in F^c$$

于是由定义 3.1，

$$(\lambda I_2-T_2)Af_1(\lambda)=A(\lambda I_1-T_1)f_1(\lambda)=Ax,\ \lambda\in F^c.$$

因此 $F^c\subseteq\rho_{T_2}(Ax)$，$\sigma_{T_2}(Ax)\subseteq F$. 故 $Ax\in X_{2T_2}(F)$. 所以

$$AX_{1T_1}(F)\subseteq X_{2T_2}(F),\ F\in\mathscr{F}.$$

定理 3.1 $T_i\in\mathscr{B}(X_i)$ $(i=1,2)$ 是 (AC) 算子，T_1 是 T_2 的拟仿射变换，则

$$\sigma(T_2)\subseteq\sigma(T_1).$$

证明 若不然，存在 $\lambda_0\in\sigma(T_2)$，而且 $\lambda_0\notin\sigma(T_1)$. 这样

$$d_0=\text{dist}\ (\{\lambda_0\},\sigma(T_1))>0.$$

令 $F_0=\left\{\lambda\,\middle|\ |\lambda-\lambda_0|\geqslant\frac{d_0}{2}\right\}$. 显然

$$\sigma(T_1)\subseteq F_0.$$

所以

$$X_1=X_{1T_1}(\sigma(T_1))=X_{1T_1}(\sigma(T_1)\cap F_0)=X_{1T_1}(F_0).$$

由命题 3.2，对拟仿射 $A\in\mathscr{B}(X_1,X_2)$ 有

$$AX_1=AX_{1T_1}(F_0)\subseteq X_{2T_2}(F_0).$$

又 $X_2=\overline{AX_1}\subseteq\overline{X_{2T_2}(F_0)}=X_{2T_2}(F_0)$，因此

$$X_{2T_2}(F_0)=X_2.$$

所以

$$\sigma(T_2)=\sigma(T_2|X_{2T_2}(F_0))\subseteq F_0.$$

已知 $\lambda_0\notin F_0$，矛盾. 故必有

$$\sigma(T_2)\subseteq\sigma(T_1).$$

定理 3.2 $T_i\in\mathscr{B}(X_i)$ $(i=1,2)$ 是 (AC) 算子，T_1 与 T_2 是拟相似的，则

$$\sigma(T_1)=\sigma(T_2).$$

证明 由定义3.2，3.1以及定理3.1可知

$$\sigma(T_2)\subseteq\sigma(T_1),\ \sigma(T_1)\subseteq\sigma(T_2).$$

因此

$$\sigma(T_1)=\sigma(T_2).$$

§4 谱极大空间的继承性

命题 4.1 $T\in\mathscr{B}(X)$是(AC)算子，$f:G\to X$是解析函数($G\supseteq\sigma(T)$是开集)，则$f(T)$是(AC)算子，而且

$$X_{f(T)}(F)=X_T(f^{-1}(F)),\ F\in\mathscr{F}.$$

证明 由第一章定理3.1，$f(T)$有性质(A)，对任意$\in X_{f(T)}(F)$，由局部谱写像定理，

$$f(\sigma_T(x))=\sigma_{f(T)}(x)\subseteq F,\ F\in\mathscr{F}.$$

因此

$$\sigma_T(x)\subseteq f^{-1}(F),\ F\in\mathscr{F}.$$

于是$x\in X_T(f^{-1}(F))$.

反之，若$x\in X_T(f^{-1}(F))$，则

$$\sigma_T(x)\subseteq f^{-1}(F),\ F\in\mathscr{F}$$

由局部谱写像定理，

$$\sigma_{f(T)}(x)=f(\sigma_T(x))\subseteq f[f^{-1}(F)]=F,\ F\in\mathscr{F},$$

从而$x\in X_{f(T)}(F)$，所以

$$X_{f(T)}(F)=X_T(f^{-1}F)),\ F\in\mathscr{F}.$$

又$f^{-1}(F)\in\mathscr{F}$，故$f(T)$亦有闭性(C). 所以$f(T)$是(AC)算子.

命题 4.2 $T\in\mathscr{B}(X)$是(AC)算子，Y是T的谱极大空间，则$T_Y\in\mathscr{B}(Y)$是(AC)算子，而且

$$Y_{T|Y}(F)=Y\cap X_T(F),\ F\in\mathscr{F}.$$

证明 令$x\in Y\cap X_T(F)$，由命题1.2之推论，

$$\sigma_{T|Y}(x)=\sigma_T(x)\subseteq F,$$

所以$x\in Y_{T|Y}(F)$.

反之，若$x\in Y_{T|Y}(F)$，由命题 1.2 之推论，

$$\sigma_T(x)=\sigma_{T|Y}(x)\subseteq F,$$

故$x\in X_T(F)$。又$x\in Y$，所以

$$x\in Y\cap X_T(F),\ F\in\mathscr{F}.$$

因此

$$Y\cap X_T(F)=Y_{T|Y}(F),\ F\in\mathscr{F}.$$

命题 4.3 $T_j\in\mathscr{B}(X_j)$ $(j=1,2)$是(AC)算子当且仅当$T_1\oplus T_2$是(AC)算子。此外

$$X_{1T_1}(F)\oplus X_{2T_2}(F)=(X_1\oplus X_2)_{T_1\oplus T_2}(F);\ F\in\mathscr{F}.$$

证明 设$T_j(j=1,2)$是(AC)算子，由第一章命题 3.1，$T_1\oplus T_2$亦有性质(A)。令$x_j\in X_{jT_j}(F)$，$\sigma_{T_j}(x_j)\subseteq F$，于是

$$\sigma_{T_1\oplus T_2}(x_1\oplus x_2)=\sigma_{T_1}(x_1)\cup\sigma_{T_2}(x_2)\subseteq F.$$

故

$$x_1\oplus x_1\in(X_1\oplus X_2)_{T_1\oplus T_2}(F).$$

反之，若$x_1\oplus x_2\in(X_1\oplus X_2)_{T_1\oplus T_2}(F)$，则

$$\sigma_{T_1}(x_1)\cup\sigma_{T_2}(x_2)=\sigma_{T_1\oplus T_2}(x_1\oplus x_2)\subseteq F.$$

故

$$\sigma_{T_j}(x_j)\subseteq F\ \ (j=1,2).$$

因此$x_j\in X_{jT_j}(F)$ $(j=1,2)$。这样

$$x_1\oplus x_2\in X_{1T_1}(F)\oplus X_{2T_2}(F).$$

所以

$$X_{1T_1}(F)\oplus X_{2T_2}(F)=(X_1\oplus X_1)_{T_1\oplus T_2}(F).$$

从$X_{jT_j}(F)$ $(j=1,2)$是闭的知道$(X_1\oplus X_2)_{T_1\oplus T_2}(F)$，$F\in\mathscr{F}$是闭的，因此$T_1\oplus T_2$是$(AC)$算子。

若$T_1\oplus T_2$是(AC)算子，由第一章命题 3.1 知，T_j $(j=1,2)$亦有性质(A)。同样可证明

$$X_{1T_1}(F)\oplus X_{2T_2}(F)=(X_1\oplus X_2)_{T_1\oplus T_2}(F).$$

由此可知$X_{jT_j}(F)$，$F\in\mathscr{F}$ $(j=1,2)$是闭的。因此T_j $(j=1,2)$是(AC)算子。

注　记

(*AC*)算子概念是在〔2〕中由我们首先引入的，它在算子谱分解理论研究中颇为有用。

谱极大空间定义1.1是由C.Foias[1]首先引入的。命题1.1亦属于C.Foias[1]. 命题1.2是R.G.Bartle与Kariotis[1]的结果。命题1.3首先由〔4〕给出，但可惜证明是错误的，本书给出的证明取自我们文献〔3〕。

例1取自C.Foiaz与I.Colojoara专著〔2〕。封闭性(*C*)是N.Dunford[2]给出的。定理2.1于1972年由M.B.Dollinger与K.K.Oberai[1]证明的。而关于性质(*C*)的一些充分性判别法，如命题2.1则属于N.Dunford[2]。定理2.2是属于C.Foias[2]。定理2.3证明是孙善利[3]给出的。定理2.4属于Apostol[2]。命题2.3原出现于专著〔2〕，但我们[2]改进为对(*AC*)算子亦成立的形式。

命题3.1是我们在〔1〕中给出的。拟仿射与拟相似概念是由Sz.Nagy与C.Foias[2]引入的。命题3.2，定理3.1及定理3.2是由我们[1]建立的，但证明方法取自专著〔2〕。

命题4.1及命题4.3属于C.Foias与I.Colojoara专著〔2〕。

第三章　性　质 (ACD)

§1　可分解算子

定义 1.1　$T\in\mathscr{B}(X)$称n-可分解章子 (n-decomposable operator)，若对$\sigma(T)$的任意的m ($m\leqslant n$)开复盖$\{G_i\}_{i=1}^m$，皆存在T的谱极大空间$\{Y_i\}_{i=1}^m$，使得

$$X=\sum_{i=1}^m Y_i,\ \sigma(T|Y_i)\subseteq G_i\quad(i=1,2,\cdots,m).$$

定义 1.2　$T\in B(X)$ 称为可分解算子 (decomposable operator)，若对任意自然数n，T是n-可分解算子。

显然，若 T 是 n-可分解算子，则对任意自然数$m\leqslant n$，T是m-可分解算子. 不妨称可分解算子是∞-可分解算子。

命题 1.1　$T\in\mathscr{B}$ (X) 是可分解算子，$G\subseteq\boldsymbol{C}$ 是开集，使

$$G\cap\sigma(T)\neq\phi.$$

则存在非零的谱极大空间Y，使$\sigma(T|Y)\subseteq G$。

证明　做开集H，使$\{G,H\}$为$\sigma(T)$的开复盖，并且$\sigma(T)\not\subset H$，由定义1.2，存在T的谱极大空间$\{Y,Z\}$，使得

$$X=Y+Z,\ \sigma(T|Y)\subseteq G,\ \sigma(T|Z)\subseteq H.$$

注意$Y\neq\{0\}$，否则　$Z=X$，这样

$$\sigma(T)=\sigma(T|Z)\subset H.$$

矛盾。证毕。

命题 1.2　$Y_i(i=1,2)$是X的子空间，而且

$$X=Y_1+Y_2,$$

又f：$D\to X$是解析函数，则存在解析函数 $g_i:D\to Y_i(i=1,2)$，

使得

$$f(\lambda)=g_1(\lambda)+g_2(\lambda),\quad \lambda\in D$$

证明 做连续映射 $\Delta: Y_1\cap Y_2\to Y_1\oplus Y_2$

$$\Delta x=x\oplus(-x),\quad x\in Y_1\cap Y_2,$$

∇: $Y_1\oplus Y_2\to X=Y_1+Y_2$

$$\nabla(x_1\oplus x_2)=x_1+x_2, x_i\in Y_i \quad (i=1,2).$$

不难看出，下述Banach空间列

$$0\to Y_1\cap Y_2\xrightarrow{\Delta} Y_1\oplus Y_2\xrightarrow{\nabla} Y_1+Y_2\to 0$$

是短正合列.

又令$U\subseteq D$是开圆盘,我们证明

$$0\to\mathscr{U}(U,Y_1\cap Y_2)\xrightarrow{\Delta^*}\mathscr{U}(U,Y_1\oplus Y_2)$$
$$\xrightarrow{\nabla^*}\mathscr{U}(U,Y_1+Y_2)\to 0$$

亦是短正合列. 其中$\mathscr{U}(U,Z)$是定义于U上取值于Banach空间Z的解析函数全体在内部一致收敛拓扑下做成的 Frecht空间，Δ^*,∇^*是由Δ, ∇诱导出的连续映射:对$f\in\mathscr{U}(U,Y_1\cap Y_2)$,

$$f(\lambda)=\sum_{i=0}^{\infty}a_i(\lambda-\lambda_0)^i, \lambda\in U,\quad a_i\in Y_1\cap Y_2\quad (i=0,1,2,\cdots).$$

$$\Delta^* f(\lambda)=\sum_{i=0}^{\infty}\Delta a_i(\lambda-\lambda_0)^i,$$

由于

$$\frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\|\Delta a_i\|^{\frac{1}{n}}}=\frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\|a_i\oplus(-a_i)\|^{\frac{1}{n}}}$$

$$=\frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\ 2^{\frac{1}{n}}\|a_i\|^{\frac{1}{n}}}=\frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\|a_i\|^{\frac{1}{n}}},$$

故$\Delta^* f\in\mathscr{U}(U,Y_1\oplus Y_2)$.

对$g\in\mathscr{U}(U,Y_1\oplus Y_2)$, $g(\lambda)=\sum\limits_{i=0}^{\infty}b_i(\lambda-\lambda_0)^i$, $\lambda\in U$, b_i

$\in Y_1 \oplus Y_2 \quad (i=0,1,2,\cdots)$,

$$\nabla^* g(\lambda) = \sum_{i=0}^{\infty} \nabla b_i (\lambda - \lambda_0)^i.$$

由于

$$\frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\|\nabla b_i\|^{\frac{1}{n}}} = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\|b_i^{(1)} + b_i^{(2)}\|^{\frac{1}{n}}}$$

$$\geqslant \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}[\|b_i^{(1)}\| + \|b_i^{(2)}\|]^{\frac{1}{n}}} = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\|b_i\|^{\frac{1}{n}}},$$

$b_i^{(j)} \in Y_j\,(j=1,2)$，故$\nabla^* g \in \mathscr{U}(U, Y_1 + Y_2) = \mathscr{U}(U, X)$.

我们知道$\nabla(\varDelta a_i) = 0\,(i=0,1,2,\cdots)$，所以对$f \in \mathscr{U}(U, Y_1 \cap Y_2)$，

$$\nabla^*(\varDelta^* f) = \sum_{i=0}^{\infty} \nabla(\varDelta a_i)(\lambda - \lambda_0)^i = 0.$$

因此

$$0 \to \mathscr{U}(U, Y_1 \cap Y_2) \xrightarrow{\varDelta^*} \mathscr{U}(U, Y_1 \oplus Y_2) \xrightarrow{\nabla^*} \mathscr{U}(U, X) \to 0$$

亦是短正合列。故

$$0 \to \mathscr{U}(D, Y_1 \cap Y_2) \xrightarrow{\varDelta^*} \mathscr{U}(D, Y_1 \oplus Y_2) \xrightarrow{\nabla^*} \mathscr{U}(D, X) \to 0$$

是短正合列。

注意题中$f \in \mathscr{U}(D, X)$，∇^*是满射，存在$g \in \mathscr{U}(D, Y_1 \oplus Y_2)$，使得

$$\nabla^* g = f,$$

又$\mathscr{U}(D, Y_1 \oplus Y_2) = \mathscr{U}(D, Y_1) \oplus \mathscr{U}(D, Y_2)$，所以存在$g_i \in \mathscr{U}(D, Y_i)\,(i=1,2)$，使

$$g = g_1 \oplus g_2,$$

于是

$$f(\lambda) = g_1(\lambda) + g_2(\lambda), \quad \lambda \in D.$$

定理 1.1 $T\in\mathscr{B}(X)$是2-可分解算子，则T有性质(A).

证明 令$f: D\to X$是解析函数，$D\subseteq\mathbb{C}$是开集，使得

$$(\lambda I-T)f(\lambda)=0,\ \lambda\in D$$

不妨设D是连通的.若$D\cap\rho(T)\neq\phi$，取开圆盘$U\subseteq D\cap$ (T)，从

$$(\lambda I-T)f(\lambda)=0,\quad \lambda\in U,$$

可知，$f(\lambda)=0, \lambda\in U$.再由解析函数唯一性定 理，$f(\lambda)=0$，$\lambda\in D$，不妨设$D\subseteq\sigma(T)$.

令$\{G,H\}$是$\sigma(T)$之开复盖，使得G是单连通的，且$D\setminus\bar{G}=\phi$，$G\setminus\bar{H}\neq\phi$.由$T$的可分解性，存在$T$之谱极大空间$\{Y_1,Y_2\}$，使得

$$X=Y_1+Y_2,\ \sigma(T|Y_1)\subseteq G,\ \sigma(T,Y_2)\subseteq H.$$

由命题1.2，存在解析函数f_i: $D\to Y_i$ $(i=1,2)$，使得

$$f(\lambda)=f_1(\lambda)+{}_2(\lambda),\lambda\in D$$

从而

$$0=(\lambda I-T)f(\lambda)=(\lambda I-T)f_1(\lambda)+(\lambda I-T)f_2(\lambda),\lambda\in D,$$

所以

$$(\lambda I-T)f_1(\lambda)=(T-\lambda I)f_2(\lambda)\in Y_1\cap Y_2,\lambda\in D.$$

令$Y=Y_1\cap Y_2$，则Y是Y_1的闭子空间.取开圆盘，$V\subseteq D\setminus\bar{G}$，则$V$在$\rho(T|Y_1)$的无界分支中，故$V\subseteq\rho(T|Y)$. 令$g_1(\lambda)=(\lambda I-T)f_1(\lambda)$，则$R(\lambda,T|Y)g_1(\lambda)\in Y,\lambda\in V$.由于

$$\begin{aligned}&(\lambda I-T|Y_1)[f_1(\lambda)-R(\lambda,T|Y)g_1(\lambda)]\\&=(\lambda I-T)f_1(\lambda)-(\lambda I-T_Y)R(\lambda,T_Y)g_1(\lambda)\\&=0,\quad \lambda\in V,\end{aligned}$$

在V上，$\lambda I-T|Y_1$是有有界逆的，因此

$$f_1(\lambda)=R(\lambda,T|Y)g_1(\lambda)\in Y\subseteq Y_2,\lambda\in V$$

由解析开拓，$f_1(\lambda)\in Y_2,\lambda\in D$.因此，$f(\lambda)\in Y_2,\lambda\in D$.又$\bar{H}^c\subseteq\rho(T|Y_2)$，所以$D\cap\bar{H}^c=D\setminus\bar{H}\subseteq\rho(T|Y_2)$.这样对$\lambda\in D\setminus\bar{H}$，从等式

$$0=(\lambda I-T)f(\lambda)$$
$$=(\lambda I-T|Y_2)f(\lambda),\lambda\in D\setminus\bar{H},$$

及$R(\lambda,T|Y_2)\in\mathscr{B}(Y_2)$得$f(\lambda)=0,\lambda\in D\setminus\bar{H}$. 由解析函数恒等定理，$f(\lambda)=0$，$\lambda\in D$.证毕。

定理1.2 $T\in\mathscr{B}(X)$是2-可分解算子，则T是(AC)算子。

证明由定理 1.1只须证明对于任何$F\in\mathscr{F}$,$X_T(F)$是闭的.由第二章§2流形$X_T(F)$定义可知

$$X_T(F)=X_T(F\cap\sigma(T))$$

不妨设$F\subseteq\sigma(T)$.

令$G\supseteq F$是一开集，H是另一开集，使得

$$\sigma(T)\subseteq G\cup H,\qquad F\cap\bar{H}=\phi.$$

由于T是可分解算子，存在T之谱极大空间$\{Y_G,Y_H\}$，使得

$$X=Y_G+Y_H,$$
$$\sigma(T|Y_G)\subseteq G,\qquad \sigma(T|Y_H)\subseteq H.$$

令$Y=\bigcap\limits_{G\supseteq F}Y_G$，往证 $X_T(F)=Y$.

若$x\in X_T(F)$，则存在解析函数$\tilde{x}$: $F^c\to X$，使得

$$(\lambda I-T)\tilde{x}(\lambda)=x,\qquad \lambda\in F^c,$$

对$x\in X_T(F)$，

$$x=y_G+y_H,\quad y_G\in Y_G,\ y_H\in Y_H.$$

于是对$\lambda\in F^c\cap\rho(T|Y_H)$，有

$$(\lambda I-T)(\tilde{x}(\lambda)-R(\lambda,T|Y_H)y_H)=x-y_H=y_G.$$

因为T有性质(A)，$\tilde{x}(\lambda)-R(\lambda,T|Y_H)y_H$在开集$F^c\cap\rho(T|Y_H)$上解析，因此

$$\tilde{y}_G(\lambda)=\tilde{x}(\lambda)-R(\lambda,T|Y_H)y_H,$$
$$\lambda\in F^c\cap\rho(T|Y_H).$$

而且

$$\sigma_T(y_G)\subseteq F\cup\sigma(T|Y_H)\subseteq F\cup\bar{H}.$$

令T是含在$F^c \cap H^c$中围绕F的Jordan围道，则

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \tilde{y}_G(\lambda)\,d\lambda = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \tilde{x}(\lambda)\,d\lambda$$

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma R(\lambda, T\,|\,Y_H)\,y_H\,d\lambda.$$

又$H^c \subseteq \rho(T\,|\,Y_H)$，故

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma R(\lambda, T\,|\,Y_H)\,y_H\,d\lambda = 0.$$

再令　$C = \{\lambda \,\big|\, |\lambda| = \|T\| + 1\}$，则

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \tilde{x}(\lambda)\,d\lambda = \frac{1}{2\pi i}\int_C \tilde{x}(\lambda)\,d\lambda$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_C R(\lambda, T)\,x\,d\lambda = x.$$

由于$\tilde{y}_G(\lambda)$是$R(\lambda, T\,|\,Y_G)\,y_G$的最大解析扩张，因此

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \tilde{y}_G(\lambda)\,d\lambda \in Y_G.$$

所以，$x \in Y_G$，从而

$$X_T(F) \subseteq Y_G,\quad 对任意G \supseteq F.$$

故

$$X_T(F) \subseteq Y.$$

另一方面，对任何$x \in Y$，必有$x \in Y_G$，则

$$\sigma_T(x) \subseteq \sigma_{T|Y_G}(x) \subseteq \sigma(T\,|\,Y_G) \subseteq G.$$

因此

$$\sigma_T(x) \subseteq \bigcap_{G \supseteq F} G = F.$$

故$x \in X_T(F)$，即$Y \subseteq X_T(F)$。证毕。

命题1.3　$T \in \mathscr{B}(X)$是2-可分解算子，Y是T的谱极大空间，则

$$Y = X_T(\sigma(T|Y)).$$

由前定理及第二章命题2.2得证。

命题1.4 $T \in \mathscr{B}(X)$是n-可分解算子，则存在T之谱极大空间$\{Y_i\}_{i=1}^n$，使得

$$\sigma(T) = \bigcup_{i=1}^{n} \sigma(T|Y_i).$$

证明 令$\{G_i\}_{i=1}^n$是$\sigma(T)$的开复盖，存在T的谱极大空间$\{Y_i\}_{i=1}^n$，使得

$$X = \sum_{i=1}^{n} Y_i, \quad \sigma(T|Y_i) \subseteq G_i \ (i = 1, \cdots, n).$$

由第二章定理2.2，

$$\sigma(T|Y_i) \subseteq \sigma(T),$$

故

$$\bigcup_{i=1}^{n} \sigma(T|Y_i) \subseteq \sigma(T).$$

另一方面，对任给的$x \in X$，有

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i, \qquad x_i \in Y_i \ (i = 1, \cdots, n),$$

由第二章命题1.3及第一章定理2.1，有

$$\sigma_T(x) \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} \sigma_T(x_i) = \bigcup_{i=1}^{n} \sigma_{T|Y_i}(x_i) \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} \sigma(T|Y_i).$$

根据第一章定理2.2，

$$\sigma(T) = \bigcup_{x \in X} \sigma_T(x) \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} \sigma(T|Y_i).$$

命题1.5 $T \in \mathscr{B}(X)$ 是 2-可分解算子，又 $F \subseteq \sigma(T)$ 是闭的，$G \supseteq F$是任意开集，则存在T的谱极大空间Y，使得

$$F \subseteq \sigma(T|Y) \subseteq G.$$

证明 注意$\{G, F^c\}$构成$\sigma(T)$的开复盖，存在T之谱极大空间Y与Z，使得

$$X = Y \dotplus Z, \quad \sigma(T|Y) \subseteq G, \quad \sigma(T|Z) \subseteq F^c.$$

由命题1.4，

$$\sigma(T) = \sigma(T|Y) \cup \sigma(T|Z).$$

因此$F \subseteq \sigma(T|Y)$.证毕.

定理1.3 $T \in \mathscr{B}(X)$是2-可分解算子，Y是T的谱极大空间，则

$$\sigma(T^Y) = \overline{\sigma(T) \setminus \sigma(T_Y)}.$$

证明 首先证明

$$\sigma(T) \subseteq \sigma(T_Y) \cup \sigma(T^Y).$$

令$\lambda \in \rho(T_Y) \cap \rho(T^Y)$，对任意$x \in X, \hat{x} \in X/Y$.从$(\lambda I - T^Y)$有有界逆，存在$\hat{y} \in X/Y$，使得

$$(\lambda I - T^Y)\hat{y} = \hat{x}.$$

因此存在$y \in X$，使得$(\lambda I - T)y - x \in Y$，又$(\lambda I - T_Y)$有有界逆，存在$z \in Y$，使得

$$(\lambda I - T)z = (\lambda I - T)y - x,$$

或者

$$(\lambda I - T)(y - z) = x.$$

可见$(\lambda I - T)$是满射的.而T有性质(A)，从第一章定理1.2之推论2，$(\lambda I - T)$是单射的，从而$\lambda \in \rho(T)$.这样

$$\sigma(T) \subseteq \sigma(T_Y) \cup \sigma(T^Y);$$

所以

$$\overline{\sigma(T) \setminus \sigma(T_Y)} \subseteq \sigma(T^Y).$$

往证相反包含关系.若存在一个复数

$$\lambda \in \sigma(T^Y) \setminus \overline{\sigma(T) \setminus \sigma(T_Y)},$$

可做$\sigma(T)$的开复盖$\{G_1, G_2\}$，使得

$$\overline{\sigma(T) \setminus \sigma(T_Y)} \subseteq G_1, \lambda \notin G_1,$$

$$\bar{G}_2 \cap \overline{\sigma(T) \setminus \sigma(T_Y)} = \phi$$

存在T之谱极大空间$\{Y_1, Y_2\}$，使得

$$X = Y_1 + Y_2, \quad \sigma(T|Y_i) \subseteq G_i \ (i = 1, 2).$$

按$G_i\ (i=1,2)$的选取，

$$\sigma(T|Y_2)\subseteq G_2\cap\sigma(T)\subseteq\sigma(T|Y).$$

Y是T之谱极大空间，故$Y_2\subseteq Y$.

对任意$\hat{y}\in X/Y$，取$y\in X$，使得$y+Y=\hat{y}$. 由分解

$$y=y_1+y_2 \qquad y_i\in Y_i \quad (i=1,2),$$

$y_2\in Y_2\subseteq Y$，所以$\hat{y}=\hat{y}_1$. 而$\lambda\in\rho(T|Y_1)$，存在$x\in Y_1$，使得

$$(\lambda I-T)x=y_1.$$

于是

$$(\lambda I-T^Y)\hat{x}=\hat{y}_1=\hat{y}.$$

这说明$(\lambda I-T^Y)$是满射的，Y是T的谱极大空间. 由第二章命题1.4及第一章定理3.3，T^Y有单值扩张性(A)，因此$\lambda\notin\sigma(T^Y)$. 矛盾. 故

$$\sigma(T^Y)=\overline{\sigma(T)\setminus\sigma(T_Y)}.$$

命题1.6 $T\in\mathscr{B}(X)$是2-可分解算子，则对任意开集$G\subseteq\mathbb{C}$，皆成立

$$\overline{G\cap\sigma(T)}\subseteq\sigma(T|\overline{X_T(G)})\subseteq\bar{G}\cap\sigma(T).$$

证明 我们仅需证明左端包含关系. 令$\lambda\in G\cap\sigma(T)$，由命题1.5，存在$T$之谱极大空间$Y$，使得

$$\{\lambda\}\subseteq\sigma(T|Y)\subseteq G.$$

对任意$x\in Y$，

$$\sigma_T(x)\subseteq\sigma_{T|Y}(x)\subseteq\sigma(T|Y)\subseteq G.$$

故$x\in\overline{X_T(G)}$，即$Y\subseteq\overline{X_T(G)}$. 不难看出$Y$是$T|\overline{X_T(G)}$的谱极大空间. 所以

$$\lambda\in\sigma(T|Y)\subseteq\sigma(T|\overline{X_T(G)}).$$

从而

$$G\cap\sigma(T)\subseteq\sigma(T|\overline{X_T(G)}).$$

因此

$$\overline{G\cap\sigma(T)}\subseteq\sigma(T|\overline{X_T(G)}).$$

命题1.7 $T\in\mathscr{B}(X)$ 是2-可分解算子，对任意开集 $G\subseteq\mathbb{C}$，若 $G\cap\sigma(T)\neq\phi$，且 $\sigma(T)\not\subseteq\overline{G}$，则存在 T 之非平凡的谱极大空间 Y，使

$$\sigma(T_Y)\subseteq\overline{G},\ \sigma(T^Y)\cap G=\phi.$$

证明 令 $Y=X_T(\overline{G})$，由定理1.2，T 是 (AC) 算子，故 Y 是 T 之谱极大空间．由命题1.1及1.6，Y 是非平凡的，而且

$$\overline{G\cap\sigma(T)}\subseteq\sigma(T_Y)\subseteq\overline{G}\cap\sigma(T).$$

再由定理1.3，

$$\sigma(T^Y)=\overline{\sigma(T)\setminus\sigma(T_Y)}$$
$$\subseteq\sigma(T)\setminus\overline{G\cap\sigma(T)}.$$

由此可见

$$\sigma(T^Y)\cap G=\phi.$$

证毕．

§2 性 质 (ACD)

定义2.1 $T\in\mathscr{B}(X)$ 是 (AC) 算子，称 T 具有分割性条件 (D)，若对任意 $F\in\mathscr{F}$，皆有

$$\sigma(T^{X_T(F)})\subseteq\sigma(T)\setminus F^\circ$$

此处 F° 表示 F 之内核．

命题2.1 $T\in\mathscr{B}(X)$，$Y\in\mathrm{Lat}T$，则有：

(i) $\sigma(T)\subseteq\sigma(T_Y)\cup\sigma(T^Y)$；

(ii) $\sigma(T_Y)\subseteq\sigma(T)\cup\sigma(T^Y)$；

(iii) $\sigma(T^Y)\subseteq\sigma(T)\cup\sigma(T_Y)$．

证明 (i) 仿定理1.3证明的第一部分即可得出．

(ii) 令 $\lambda\in\rho(T)\cap\rho(T^Y)$．显然 $\lambda I-T_Y$ 是单射的．对任意 $y\in Y$，存在 $x\in X$，使

$$y=(\lambda I-T)x.$$

于是

$$(\lambda I-T^Y)\hat{x}=\hat{y}=\hat{0}.$$

又$\lambda\in\rho(T^Y)$，故$\hat{x}=\hat{0}$ 于是$x\in Y$.这样对任意$y\in Y$，有$x\in Y$，使得

$$y=(\lambda I-T_Y)x.$$

即$(\lambda I-T_Y)$是满射的，故$\lambda\in\rho(T_Y)$。

(iii) 令$\lambda\in\rho(T)\cap\rho(T_Y)$。考虑等式

$$(\lambda I-T^Y)\hat{x}=0,$$

可知$(\lambda I-T)x\in Y$。因此

$$x=R(\lambda,T)(\lambda I-T)x$$
$$=R(\lambda,T_Y)(\lambda I-T)x\in Y.$$

这样$\hat{x}=\hat{0}$，即$\lambda I-T^Y$是单射的。

令$\hat{x}\in X/Y$，任取$x\in\hat{x}$，由于$\lambda\in\rho(T)$，存在$z\in X$，使得

$$(\lambda I-T)z=x,$$

于是$\hat{z}\in X/Y$，使得

$$(\lambda I-T^Y)\hat{z}=\hat{x}.$$

$(\lambda I-T^Y)$是满射的，即$\lambda\in\rho(T^Y)$。

命题2.2 $T\in\mathscr{B}(X)$，$Y\in\mathrm{Lat}T$，则$\sigma(T_Y)\subseteq\sigma(T)$ 等价于$\sigma(T^Y)\subseteq\sigma(T)$。

可由命题2.1之(ii)与(iii)证明之。

命题2.3 $T\in\mathscr{B}(X)$，Y是T的解析不变子空间，则$\sigma(T_Y)\subseteq\sigma(T)$。

证明 令$y\in Y$是任意的，

$$y=(\lambda I-T)R(\lambda,T)y,\qquad \lambda\in\rho(T).$$

由解析不变子空间的定义，

$$R(\lambda,T)y\in Y,\qquad \lambda\in\rho(T),$$

或者

$$R(\lambda,T)Y\subseteq Y,\qquad \lambda\in\rho(T).$$

往证$\sigma(T_Y)\subseteq\sigma(T)$。令$\lambda\in\rho(T)$，则$\lambda I-T_Y$是单射的。否则

$$\lambda\in\sigma_p(T_Y)\subseteq\sigma_p(T)\subseteq\sigma(T).$$

矛盾。对每个$y\in Y$，存在唯一$x\in X$，使得

$$y=(\lambda I-T)x.$$

因此

$$x=R(\lambda,T)y\in Y,$$

从而 $(\lambda I-T_Y)$是满射的，故$\lambda\in\rho(T_Y)$. 证毕.

由命题2.1，2.2及2.3可见，若$T\in\mathscr{B}(X)$，Y是T的谱极大空间，则

$$\sigma(T)=\sigma(T_Y)\cup\sigma(T^Y).$$

若T具有性质(ACD)，则由定义2.1可见，对$F=\sigma(T_Y)$有

$$\begin{aligned}\sigma(T^Y)&\subseteq\sigma(T)\setminus\sigma(T_Y)^\circ\\&=[\sigma(T)\setminus\sigma(T_Y)]\cup\partial\sigma(T_Y).\end{aligned}$$

因此

$$\sigma(T^Y)\subseteq[\sigma(T)\setminus\sigma(T_Y)]\cup[\partial\sigma(T_Y)\cap\partial\sigma(T^Y)],$$

从而

$$\sigma(T^Y)=[\sigma(T)\setminus\sigma(T_Y)]\cup[\partial\sigma(T_Y)\cap\partial\sigma(T^Y)].$$

这样$\sigma(T)$被分割成仅有公共边界$S=\partial\sigma(T_Y)\cap\partial\sigma(T^Y)$的两部分：$\sigma(T_Y)$与$\sigma(T^Y)$（见图3）。所以我们把定义2.1的性质称作分割性。

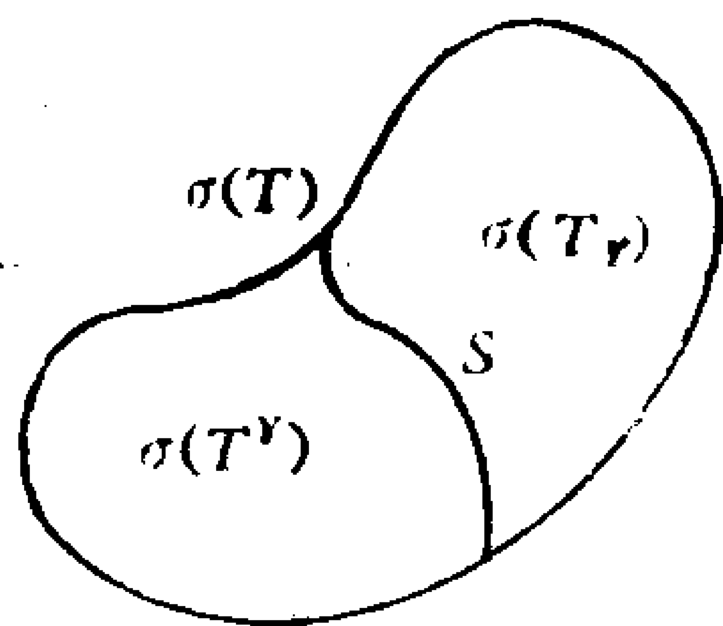


图 3

定义 2.2 $T\in\mathscr{B}(X)$是(AC)算子，称T有几乎局部化谱 (almost localized spectrum)，如果对$F\in\mathscr{F}$的任何开复盖$\{G_i\}_{i=1}^n$，皆有

$$X_T(F)\subseteq\sum_{i=1}^n X_T(G_i).$$

我们先考虑2-可分解算子与可分解算子的等价性。

命题2.4 $T\in\mathscr{B}(X)$是2-可分解算子，又对任何$F\in\mathscr{F}$及

F的开复盖$\{G_1,G_2\}$有

$$X_T(F)\subseteq X_T(G_1)+X_TG_2),$$

则T是具有几乎局部化谱的可分解算子.

证明 我们先用归纳法证明：对任何$F\in\mathscr{F}$及F的开复盖$\{G_i\}_{i=1}^n$，皆有

$$X_T(F)\subseteq X_T(G_1)+X_T(G_2)+\cdots+X_T(G_n).$$

当$n=2$时显然成立.设$n=$ m时成立.令$\{G_i\}_{i=1}^{m+1}$是F的开复盖,可找到F的另一个开复盖$\{D_i\}_{i=1}^m$，使得

$$\bar{D}_i\subseteq G_i(i=1,\cdots,m-1),\quad \bar{D}_m\subseteq G_m\cup G_{m+1}.$$

由归纳法假设

$$X_T(F)\subseteq\sum_{i=1}^m X_T(D_i).$$

注意，$\bar{D}_m\subseteq G_m\cup G_{m+1}$，由题中条件,

$$X_T(D_m)\subseteq X_T(\bar{D}_m)\subseteq X_T(G_m)+X_T(G_{m+1}).$$

因此

$$X_T(F)\subseteq X_T(G_1)+X_T(G_2)+\cdots$$
$$+X_T(G_m)+X_T(G_{m+1}).$$

往证T是可分解算子.令$\{G_i\}_{i=1}^n$是$\sigma(T)$任意有限开复盖,再做$\sigma(T)$的另一开复盖$\{D_i\}_{i=1}^n$,且使$\bar{D}_i\subseteq G_i(i=1,2,\cdots,n)$.

于是

$$X_T(\sigma(T))\subseteq\sum_{i=1}^n X_T(D_i).$$

而$X=X_T(\sigma(T)),X_T(D_i)\subseteq X_T(\bar{D}_i)\subseteq X(i=1,2,\cdots,n)$. 由定理1.2,

$$X=\sum_{i=1}^n X_T(\bar{D}_i),$$

且

$$\sigma(T|X_T(\bar{D}_i))\subseteq\bar{G}_i\subseteq G_j(i=1,2\cdots n).$$

故T是可分解算子。证毕。

命题2.5 $T\in\mathscr{B}(X)$是2-可分解算子，则对任何$E,F\in\mathscr{F}$，

$$(X/X_T(E))_{T^{X_T(E)}}(E\cup F)=X_T(E\cup F)/X_T(E).$$

证明 令$\hat{x}\in(X/X_T(E))_{T^{X_T(E)}}(E\cup F)$，于是

$$\sigma_{T^{X_T(E)}}(\hat{x})\subseteq E\cup F.$$

由第一章定理3.4，

$$\sigma_T(x)\subseteq E\cup F,\qquad x\in\hat{x},$$

因此

$$x\in X_T(E\cup F),$$

所以

$$\hat{x}\in X_T(E\cup F)/X_T(E).$$

反之，令$\hat{x}\in X_T(E\cup F)/X_T(E)$，则对任意$x\in\hat{x}$，皆有$x\in X_T(E\cup F)$.所以

$$\sigma_T(x)\subseteq E\cup F,\quad x\in\hat{x}.$$

由第一章定理3.4，

$$\sigma_{T^{X_T(E)}}(\hat{x})\subseteq\sigma_T(x)\subseteq E\cup F,x\in\hat{x}.$$

故

$$\hat{x}\in(X/X_T(E)_{T^{X_T(E)}}(E\cup F).$$

证毕。

命题2.6 $T\in\mathscr{B}(X)$是2-可分解算子，则对任何$F\in\mathscr{F}$及F的任意开复盖$\{G_1,G_2\}$，都有

$$X_T(F)\subseteq X_T(G_1)+X_T(G_2).$$

证明 不失一般性，可设F,G_1,G_2都与$\sigma(T)$相交，且$\sigma(T)\not\subseteq G_1\cup G_2$.令$E=\overline{G_1\cap G_2}$.因为$T$是2-可分解算子，由命题1.6，

$$\overline{G_1\cap G_2\cap\sigma(T)}\subseteq\sigma(T|X_T(E))\subseteq E.$$

因为$X_T(E)$是T的谱极大空间，所以$T^{X_T(E)}$有性质(A).又由定理1.3，

$$\sigma(T^{X_T(E)})=\overline{\sigma(T)\setminus\sigma(T|X_T(E))}.$$

因此

$$\sigma(T^{X_T(E)})\cap G_1\cap G_2=\phi.$$

亦即

$$\sigma(T^{X_T(E)})\subseteq(G_1\cap G_2)^c=G_1^c\cup G_2^c.$$

令$x\in X_T(F)$，$f:F^c\to X$是解析函数，使得

$$(\lambda I-T)f(\lambda)=x,\quad \lambda\in F^c.$$

用$\hat{f}$表示f在自然映射$X\to X/X_T(E)$下的像，于是$\hat{f}:F^c\to X/X_T(E)$是解析函数，而且

$$(\lambda I-T^{X_T(E)})\hat{f}(\lambda)=\hat{x},\qquad \lambda\in F^c.$$

由前述，

$$\sigma(T^{X_T(E)})\subseteq G_1^c\cup G_2^c.$$

所以$\hat{f}$有到$F^c\cup(G_1\cap G_2)$的解析扩张，仍用$\hat{f}$表示，而且

$$(\lambda I-T^{X_T(E)})\hat{f}(\lambda)=\hat{x},\quad \lambda\in F^c\cup(G_1\cap G_2)$$

令D_1表示包含$F\setminus G_2$的Cauchy区域，D_2是包含$F\setminus G_1$的Cauchy区域．又$F\setminus G_1$，$F\setminus G_2$是不相交的，故可选取D_1，D_2，以使$\bar{D}_1\cap\bar{D}_2=\phi$．对于$j=1,2$，我们定义

$$\hat{y}_j=\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D_j}\hat{f}(z)\,dz,$$

$$\hat{y}_j(\lambda)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D_j}(\lambda-z)^{-1}\hat{f}(z)\,dz,\quad \lambda\notin D_j.$$

显然　$\hat{x}=\hat{y}_1+\hat{y}_2$，而且

$$\begin{aligned}&(\lambda I-T^{X_T(E)})\,\hat{y}_j(\lambda)\\&=\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D_j}[(\lambda-z)+(zI-T^{X_T(E)})](\lambda-z)^{-1}\hat{f}(z)\,dz\\&=\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D_j}\hat{f}(z)\,dz+\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D_j}(\lambda-z)^{-1}\hat{x}\,dz\\&=\hat{y}_j,\qquad\qquad \lambda\notin D_j\quad(j=1,\ 2).\end{aligned}$$

这说明

$$\hat{y}_j\in(X/X_{T(E)})_{T^{X_T(E)}}(\bar{D}_j)\qquad(j=1,\ 2).$$

因为D_1是包含$F\setminus G_2$的任意Cauchy区域，所以

$$\hat{y}_1\in(X/X_T(E))_{T^{X_T(E)}}(E\setminus G_2),$$

$$\hat{y}_2 \in (X/X_T(E))_{T^{X_T(E)}}(F \setminus G_1).$$

取 $x_j \in X$，使得

$$\hat{y}_j = \hat{x}_j \qquad (j=1,\ 2).$$

由命题2.5

$$x_j \in X_T(\bar{G}_j) \qquad (j=1,\ 2).$$

由于 $\hat{x} = \hat{x}_1 + \hat{x}_2$，故 $x = (x_1 + z) + x_2$，此处 $z \in X_T(E)$。于是

$$x \in X_T(\bar{G}_1) + X_T(\bar{G}_2).$$

从命题2.4及命题2.6立即可得：

定理2.1 $T \in \mathscr{B}(X)$ 是 2- 可分解算子当且仅当 T 是可分解算子。

定理2.2 $T \in \mathscr{B}(X)$ 是可分解算子当且仅当 T 具有 (ACD) 性质。

证明 设 T 是可分解算子。由定理1．2，T 具有性质 (AC)，还需证明 T 具有分割性 (D)。

设 $F \in \mathscr{F}$。如果 $\lambda \in F^c$，当 $\lambda \notin \sigma(T)$ 自然有 $\lambda \notin \sigma(T^{X_T(F)})$，不妨假定 $\lambda \in \sigma(T)$。取开集 G，使 $\lambda \in G \subseteq \bar{G} \subseteq F^c$，由命题1.6，存在 T 之谱极大空间 Y 使

$$\lambda \in \overline{G \cap \sigma(T)} \subseteq \sigma(T|Y) \in F^c \subseteq F.$$

于是 $Y \subseteq X_T(F)$。所以

$$\overline{G \cap \sigma(T)} \subseteq \sigma(T|Y) \subseteq \sigma(T|X_T(F)).$$

从而由定理1.3，

$$\sigma(T^{X_T(F)}) = \overline{\sigma(T) \setminus \sigma(T|X_T(F))} \subseteq \sigma(T) \setminus G,$$

即 $\lambda = \notin \sigma(T^{X_T(F)})$

设 T 具有性质 (ACD)，往证 T 是2-可分解算子。令 $\{G_1,\ G_2\}$ 是 $\sigma(T)$ 的开复盖。只须证明

$$X = X_T(\bar{G}_1) + X_T(\bar{G}_2).$$

令 $F = \overline{G_1 \cap G_2}$，由 T 具有性质 (D)，则有

$$\sigma(T^Y) \subseteq \sigma(T) \setminus [G_1 \cap G_2].$$

其中$Y=X_T\overline{(G_1\cap G_2)}$．于是

$$\sigma(T^{X_T\overline{(G_1\cap G_2)}})\subseteq(\sigma(T)\setminus G_1)\cup(\sigma(T)\setminus G_2)$$

又$\sigma(T)\setminus G_1$与$\sigma(T)\setminus G_2$是互不相交的闭集，由著名的Riesz-Dunford 函数演算

$$X/X_T(F)=Z_1\oplus Z_2.$$

而且

$$\sigma(T^{X_T(F)}|Z_j)\subseteq\sigma(T)\setminus G_j\qquad(j=1,2).$$

令π：$X\to X/X_T(F)$ 是自然映射．我们有

$$\begin{aligned}X&=\pi^{-1}(X/X_T(F))\\&=\pi^{-1}(Z_1\oplus Z_2)\\&=\pi^{-1}(Z_1)+\pi^{-1}(Z_2).\end{aligned}$$

注意到$\pi^{-1}(Z_j)\in\text{Lat}T\,(j=1，2)$，而且

$$Z_j=\pi^{-1}(Z_j)/X_T(F)\qquad(j=1，2),$$

再由命题2．1，有

$$\begin{aligned}\sigma(T|\pi^{-1}(Z_j)&\subseteq\sigma(T^{X_T(F)}|Z_j)\cup\sigma(T|X_T(F))\\&\subseteq[\sigma(T)\setminus G_j]\cup F\\&=[\sigma(T)\setminus G_j]\cup\overline{(G_1\cap G_2)}=\overline{G}_i\end{aligned}$$

因此

$$\pi^{-1}(Z_j)\subseteq X_T(\overline{G}_i)\qquad(i\neq j).$$

故

$$X=X_T(\overline{G}_1)+X_T(\overline{G}_2),$$

且

$$\sigma(T|X_T(\overline{G}_i))\subseteq\overline{G}_i\qquad(i=1，2).$$

这样，T是2-可分解算子．由定理2．1 T 是可分解算子．

定义 2．3 $T\in\mathscr{B}(X)$ 称为n-谱可分解算子（n-spectral decomposition property），若对$\mathbb{C}$的任意k-开复盖 $\{G_i\}_{i=1}^k$ $(k\leqslant n)$，存在T的不变子空间$\{Y_i\}_{i=1}^k$．使

$$X=\sum_{i=1}^{k}Y_i,\ \sigma(T|Y_i)\subseteq G_i\qquad(i=1,\cdots,k).$$

类似地，若对任意自然数 n，T 皆是n-谱可分解算子，则称 T 是**谱可分解算子**。对一个算子 $T\in\mathscr{B}(X)$，若$\rho_\infty(T)$ 表示$\rho(T)$之无界分支，则称$\sigma_f(T)=\mathbb{C}\setminus\rho_\infty(T)$为 T 之满谱 (full spectrum)。

命题 2.7 $T\in\mathscr{B}(X)$，Y，$Z\in\mathrm{Lat}T$，使得

$$X=Y+Z,$$

则$\sigma(T^Z)\subseteq\sigma_f(T|Y)$。

证明 由于$X/Z=(Y+Z)/Z$拓扑同构于$Y/(Y\cap Z)$，故存在同构映射A: $X/Z\to Y/(Y\cap Z)$. 又令S表示T_Y在$Y/(Y\cap Z)$上的诱导算子，则$SA=AT^Z$。因此

$$\sigma(T^Z)=\sigma(S).$$

而由命题2.1，

$$\sigma(S)\subseteq\sigma(T|Y)\cup\sigma(T|Y\cap Z),$$

又由满谱性质

$$\sigma(T|Y\cap Z)\subseteq\sigma_f(T|Y),$$

故

$$\sigma(T^Z)\subseteq\sigma_f(T|Y).$$

命题 2.8 $T\in\mathscr{B}(x)$ 是2-谱可分解算子，则 T 有性质 (A)。

证明 设f: $D\to X$是任意开集 D上X-值解析函数，使

$$(\lambda I-T)f(\lambda)=0,\ \lambda\in D.$$

不失一般性，可设 D 是连通的. 任取开圆域 $U(\lambda_0.\delta)$，使$\overline{U(\lambda_0,\delta)}\subseteq D$。令 $G_1=U(\lambda_0,\ \delta)$，$G_2=(\mathbb{C}/\overline{U(\lambda_0,\ \delta/2)})$，则$\{G_1,G_2\}$是$\mathbb{C}$的一个开复盖. 由于$T$是 2-谱可分解算子，存在 T之不变子空间 $\{Y_1,Y_2\}$，使得

$$x=Y_1+Y_2,\ \sigma(T|Y_i)\subseteq G_i\quad(i=1,\ 2).$$

由命题 2.7及G_1是开圆盘知

$$\sigma(T^{Y_2})\subseteq\sigma_f(T|Y_1)\subseteq G_1.$$

设$\hat{f}$表示f在X/Y_2中的像，则$\hat{f}(\lambda)$是D上X/Y_2-值解析函数，且

$$(\lambda I-T^{Y_2})\hat{f}(\lambda)=0, \quad \lambda\in D.$$

由$D\setminus\bar{G}_1\neq\phi$及$D\setminus\bar{G}_1\subseteq\rho(T^{Y_2})$知

$$\hat{f}(\lambda)=0, \quad \lambda\in D\setminus\bar{G}_1,$$

即$f(\lambda)\in Y_2$，$\lambda\in D\setminus\bar{G}_1$。由解析开拓 $f(\lambda)\in Y_2$，$\lambda\in D$。于是有

$$(\lambda I-T|Y_2)f(\lambda)=0, \quad \lambda\in D,$$

而$D\setminus\bar{G}_2\neq\phi$，$D\setminus\bar{G}_2\subseteq\rho(T|Y_2)$，所以

$$f(\lambda)=0, \quad \lambda\in D\setminus\bar{G}_2,$$

再由解析开拓，$f(\lambda)=0$，$\lambda\in D$。证毕。

定理 2.3 设 $T\in\mathscr{B}(x)$ 是 2-谱可分解算子，则 T 有性质(AC) 。

证明 由命题 2.8，T有性质(A)。下面证T有性质(C).

设$F\in\mathscr{F}$. 对任何$z\in F^c$，记 $\delta(z)=\mathrm{dist}\{z,F\}$，则 $\delta(z)>0$ 。令 $G_1(z)=U(z,\delta(z))$，$G_2(z)=\mathbb{C}\setminus\overline{U(z,\delta(z)/2)}$。则$\{G_1(z), G_2(z)\}$是$\mathbb{C}$的一个开复盖。由假设存在 T 之不变子空间 $\{Y_1(z), Y_2(z)\}$，使得

$$x=Y_1(z)+Y_2(z),$$

$$\sigma(T|Y_i(z))\subseteq G_i(z) \quad (i=1,2).$$

由命题 2.7及$G_1(z)$的选取，

$$\sigma(T^{Y_2(z)})\subseteq\sigma_f(T|Y_1(z))\subseteq G_1(z).$$

下面只须证明

$$X_T(F)=\bigcap_{z\in F^c}\{Y_2(z)\}.$$

首先设$x\in X_T(F)$，则存在X-值解析函数$x_T F^c:\to X$，使

$$(\lambda I-T)x_T(\lambda)=x, \quad \lambda\in F^c.$$

设$\hat{x}_T$表示x_T在$X/Y_2(z)$中的像，则$\hat{x}_T(\lambda)$是 F^c上的$X/Y_2(z)$-值解析函数，且

$$(\lambda I-T^{Y_2(z)})\hat{x}_T(\lambda)=\hat{x}, \quad \lambda\in F^c.$$

令

$$\hat{f}(\lambda)=\begin{cases}\hat{x}_T(\lambda), & \lambda\in F^c,\\ R(\lambda,T^{Y_2(z)})\hat{x}, & \lambda\in\rho(T^{Y_2(z)}).\end{cases}$$

当$\lambda\in F^c\cap\rho(T^{Y_2(z)})$时，以$R(\lambda, T^{Y_2(z)})$作用上式两边得

$$\hat{x}_T(\lambda)=R(\lambda, T^{Y_2(z)})\hat{x}.$$

这说明$\hat{f}(\lambda)$定义是合理的。又

$$F^c\cup\rho(T^{Y_2(z)})\supseteq F^c\cup[G_1(z)]^c=\mathbb{C}\setminus[F\cap G_1(z)]=\mathbb{C}.$$

可见$\hat{f}(\lambda)$是整个复平面$\mathbb{C}$上的$X\setminus Y_2(z)$-值解析函数，且当$\lambda\to\infty$时，

$$\|\hat{f}(\lambda)\|=\|R(\lambda,T^{Y_2(z)})\hat{x}\|\leqslant\|R(\lambda, T^{Y_2(z)})\|\,\|\hat{x}\|\to 0.$$

由 Liouville 定理，$\hat{f}(\lambda)\equiv 0$，从而

$$\hat{x}_T(\lambda)=\hat{f}(\lambda)=0,\quad \lambda\in F^c,$$

于是 $\hat{x}=0$，即 $x\in Y_2(z)$。而 $z\in F^c$ 是任意的，所以 $x\in\bigcap\limits_{z\in F^c}\{Y_2(z)\}$。

反之，对任何$x\in\bigcap\limits_{z\in F^c}\{Y_2(z)\}$，若$z\in F^c$，则$x\in Y_2(z)$。于是

$$\sigma_T(x)\subseteq\sigma_{T|Y_2(z)}(x)\subseteq\sigma(T|Y_2(z))\subseteq G_2(z),$$

而$z\notin G_2(z)$，故$z\notin\sigma_T(x)$。所以$\sigma_T(x)\subseteq F$，即$x\in X_T(F)$。证毕。

定理2.5 $T\in\mathscr{B}(x)$是可分解算子当且仅当T是2-谱可分解算子。

证明 必要性显然，只证充分性。令$\{G_1, G_2\}$是$\sigma(T)$的任意开复盖。由$\{G_1\cup\rho(T), G_2\}$是$\mathbb{C}$的开复盖，故存在T之不变子空间$\{Y_1,Y_2\}$，使

$$X=Y_1+Y_2,\ \sigma(T|Y_1)\subseteq G_1\cup\rho(T),\ \sigma(T|Y_2)\subseteq G_2.$$

令$F_i=\sigma(T|Y_i)\ (i=1,2)$。由定理2.3，$X_T(F_i)\ (i=1,2)$是闭的，因此它们是$T$的谱极大空间，而且

$$\sigma(T|X_T(F_i))\subseteq\sigma(T)\cap F_i\subseteq G_i\ (i=1,\ 2).$$

又$Y_i\subseteq X_T(F_i)\ (i=1,\ 2)$，所以

$$X=X_T(F_1)+X_T(F_2)$$

故 T 是可分解算子。

定理2.5 $T\in\mathscr{B}(X)$ 是可分解算子当且仅当对任意开集 G，存在$Y\in\mathrm{Lat}T$，且$\sigma(T_Y)\subseteq\sigma(T)$，使得

$$\sigma(T_Y)\subseteq\bar{G},\quad \sigma(T^Y)\cap G=\phi.$$

证明 必要性可由命题1.7得到。下面证明充分性。

令$\{G_1,G_2\}$是$\mathbb{C}$的开复盖，不妨设$G_1\cap G_2\cap\sigma(T)\neq\phi$. 做开集$\{D_1,D_2\}$：使得

$$\sigma(T)\subseteq D_1\cup D_2,\quad \bar{D}_i\subseteq G_i\quad (i=1,2).$$

由假设，存在$Y\in\mathrm{Lat}\ T$，使得

$$\sigma(T_Y)\subseteq\overline{D_1\cap D_2},\quad \sigma(T^Y)\cap D_1\cap D_2=\phi.$$

又$\sigma(T|Y)\subseteq\sigma(T)$，由命题 2.2，$\sigma(T^Y)\subseteq\sigma(T)$，因此有

$$\sigma(T^Y)\subseteq\sigma(T)\cap(D_1\cap D_2)^c=(\sigma(T)\setminus D_1)\cup(\sigma(T)\setminus D_2),$$

又$(\sigma(T)\setminus D_1)\cap(\sigma(T)\setminus D_2)=\phi$，令

$$\tau_1=\sigma(T^Y)\cap(\sigma(T)\setminus D_2),$$
$$\tau_2=\sigma(T^Y)\cap(\sigma(T)\setminus D_1).$$

由Riesz分解定理，有

$$X/Y=E(\tau_1)(X/Y)\oplus E(\tau_2)(X/Y),$$

且

$$\sigma(T^Y|E(\tau_i)(X/Y))=\tau_i\subseteq D_i\qquad(i=1.2).$$

设π：$X\to X/Y$ 是自然映射，则有 $\pi^{-1}(E(\tau_i)(X/Y))\in\mathrm{Lat}T$ $(i=1,2)$。令

$$Y_i=\pi^{-1}(E(\tau_i)(X/Y))\qquad(i=1,2).$$

则$Y\subseteq Y_i\,(i=1,2)$。由

$$(T|Y_i)^Y=T^Y|Y_i/Y$$
$$=T^Y|E(\tau_i)(X/Y)\qquad(i=1,2)$$

故

$$\sigma(T|Y_i)\subseteq\sigma(T_Y)\cup\sigma((T|Y_i)^Y)$$
$$\subseteq\overline{D_1\cup D_2}\cup D_i\subseteq\bar{D}_i\subseteq G_i\quad(i=1,2).$$

$$
\begin{aligned}
X &= \pi^{-1}(X/Y) \\
&= \pi^{-1}(E(\tau_1)(X/Y)) + \pi^{-1}(E(\tau_2)(X/Y)) \\
&= Y_1 + Y_2
\end{aligned}
$$

可见T是2-谱可分解算子．再由定理2.4，T是可分解算子．证毕．

本节这些等价条件从不同角度刻划了可分解算子．

§3 谱 容 度

定义 3.1 从$\mathscr{F}$到X的闭子空间族的映射$\mathscr{E}(\cdot)$，称为**谱容度** (Spectral capacity)，如果$\mathscr{E}(\cdot)$具有下述性质：

(i) $\mathscr{E}(\phi)=\{0\}$，$\mathscr{E}(\mathbb{C})=X$；

(ii) $\mathscr{E}(\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n)=\bigcap_{n=1}^{\infty}\mathscr{E}(F_n)$，$F_n\in\mathscr{F}$ $(n=1, 2\cdots)$；

(iii) 对$\mathbb{C}$之任意有限开复盖$\{G_i\}_{n=1}^{n}$有

$$
X=\sum_{i=1}^{n}\mathscr{E}(\bar{G}_i).
$$

定义 3.2 $T\in\mathscr{B}(X)$称为具有**谱容度**$\mathscr{E}(\cdot)$，如果对每个$F\in\mathscr{F}$，有：

(iv) $\mathscr{E}(F)\in\mathrm{Lat}\ T$；

(v) $\sigma(T|\mathscr{E}(F))\subseteq F$．

定理 3.1 $T\in\mathscr{B}(X)$是可分解算子，则T具有谱容度．

证明 由第二章定理2.2，$X_T(F)$是T的谱极大空间，且$\sigma(T|X_T(F))\subseteq F$，$F\in\mathscr{F}$．

显然还有：

(i) $X_T(\phi)=\{0\}$， $X_T(\mathbb{C})=X$；

(ii) $X_T(\bigcap_{n=1}^{\infty}F_n)=\bigcap_{n=1}^{\infty}X_T(F_n)$，$F_n\in\mathscr{F}$ $(n=1,2,\cdots)$；

(iii) 若$\{G_i\}_{i=1}^{n}$是$\mathbb{C}$的开复盖，则

$$X=\sum_{i=1}^{n}X_T(\bar{G}_i).$$

因此可定义

$$\mathscr{E}(F)=X_T(F),\qquad F\in\mathscr{F}$$

则$\mathscr{E}(F)$便是T的谱容度。

由定义可见，若$T\in\mathscr{B}(X)$具有谱容度，则T是谱可分解算子。因此由前节结果立刻得到：

命题 3.1 $T\in\mathscr{B}(X)$具有谱容度，则T有性质(A)。

定理 3.2 $T\in\mathscr{B}(X)$具有谱容度，则T的谱容度是唯一的，且

$$\mathscr{E}(F)=X_T(F),\qquad F\in\mathscr{F}.$$

证明 设$F\in\mathscr{F}$。由谱容度定义(v)，有

$$\sigma(T|\mathscr{E}(F))\subseteq F,$$

所以$\mathscr{E}(F)\subseteq X_T(F)$。

往证相反包含关系。任给 $z\in F^c$，令$\delta(z)=\mathrm{dist}\{z,F\}$，则$\delta(z)>0$。令$G_1(z)=U(z,\delta(z)/2)G_2(z),=\mathbb{C}\setminus\overline{U(z,\delta(z)/3)}$，则$\{G_1(Z),G_2(z)\}$是$\mathbb{C}$之开复盖。由谱容度定义(iii)有

$$X=\mathscr{E}(\overline{G_1(z)})+\mathscr{E}(\overline{G_2(z)}),$$

仿定理 2.3的证明可知

$$X_T(F)\subseteq\mathscr{E}(\overline{G_2(z)}).$$

注意$\bigcap_{z\in F^c}\{\overline{G_2(z)}\}=F$，所以

$$X_T(F)\subseteq\bigcap_{z\in F^c}\{\mathscr{E}(\overline{G_2(z)})\}=\mathscr{E}\Big(\bigcap_{z\in F^c}\{G_2(z)\}\Big).$$
$$=\mathscr{E}(F)$$

证毕。

定义 3.3 设$\mathscr{E}(\cdot)$是谱容度，称

$$\mathrm{supp}\mathscr{E}=\bigcap\{F|F\in\mathscr{F},\ \mathscr{E}(F)=X\}$$

为谱容度$\mathscr{E}$的支集。

命题 3.3 设$T\in\mathscr{B}(X)$具有谱容度$\mathscr{E}(\cdot)$，则

$$\mathrm{supp}\mathscr{E}=\sigma(T)$$

证明 任给开集 $G\supseteq\sigma(T)$．取另一开集D，使$\sigma(T)\subseteq D\subseteq\bar{D}\subseteq G$，则$\{G,\ \bar{D}^c\}$是$\mathbb{C}$ 的一开复盖．所以

$$X=\mathscr{E}(\bar{G})+\mathscr{E}(D^c).$$

如果$x\in\mathscr{E}(D^c)$，则

$$\sigma_T(x)\subseteq\sigma_{T|\mathscr{E}(D^c)}(x)\subseteq\sigma(T|\mathscr{E}(D^c))\subseteq D^c.$$

又$\sigma_T(x)\subseteq\sigma(T)\subseteq D$，所以

$$\sigma_T(x)\subseteq D^c\cap D=\phi.$$

故$x=0$，即$\mathscr{E}(D^c)=\{0\}$．所以$\mathscr{E}(\bar{G})=X$，从而

$$\mathrm{supp}\mathscr{E}\subseteq\bar{G},$$

而$G\supseteq\sigma(T)$是任意的．所以

$$\mathrm{supp}\mathscr{E}\subseteq\sigma(T)$$

反之，若有 $\lambda\in\sigma(T)\setminus\mathrm{supp}\mathscr{E}$，则存在$\mathbb{C}$之开复盖 $\{G_1,G_2\}$，使

$$\bar{G}_1\cap\mathrm{supp}\mathscr{E}=\phi,\qquad \lambda\notin\bar{G}_2.$$

于是

$$X=\mathscr{E}(\bar{G}_1)+\mathscr{E}(\bar{G}_2).$$

由于$\bar{G}_1\cap\mathrm{supp}\mathscr{E}=\phi$，所以$\mathscr{E}(\bar{G}_1)=\{0\}$，从而

$$X=\mathscr{E}(\bar{G}_2).$$

于是

$$\sigma(T)=\sigma(T|\mathscr{E}(\bar{G}_2))\subseteq\bar{G}_2.$$

这与$\lambda\in\sigma(T)\setminus\bar{G}_2$矛盾．所以

$$\sigma(T)\subseteq\mathrm{supp}\mathscr{E}.$$

证毕．

§4 函数演算

命题 4.1 $T_j\in\mathscr{B}(X_j)\ (j=1,2)$，则$T_1\oplus T_2\in\mathscr{B}(X_1\oplus$

$X_2)$是可分解算子当且仅当$T_j(j=1,2)$是可分解算子.

证明 设$T_j(j=1,2)$是可分解算子,令$\{G_i\}_{i=1}^n$是$\sigma(T_1\oplus T_2)$的开复盖,取$\sigma(T_1\oplus T_2)$的另一开复盖$\{D_i\}_{i=1}^n$,使得$\bar{D}_i\subseteq G_i(i=1,2,\cdots n)$.由

$$\sigma(T_1\oplus T_2)=\sigma(T_1)\cup\sigma(T_2),$$

可见$\{D_i\}_{i=1}^n$是$\sigma(T_j)$的开复盖.从T_j的可分解性,

$$X_j=\sum_{i=1}^n X_{jT_j}(\bar{D}_i)\quad(j=1,2),$$

从而

$$X_1\oplus X_2=\sum_{i=1}^n X_{1T_1}(\bar{D}_i)\oplus\sum_{i=1}^n X_{2T_2}(\bar{D}_i)$$

$$=\sum_{i=1}^n X_{1T_1}(\bar{D}_i)\oplus X_{2T_2}(\bar{D}_i).$$

由第一章命题 4.3,

$$(X_1\oplus X_2)_{T_1\oplus T_2}(\bar{D}_i)=X_{1T_1}(D_i)\oplus X_{2T_2}(\bar{D}_i)\quad(i=1,2,\cdots,n)$$

是$T_1\oplus T_2$的谱极大空间.又

$$\sigma(T_1\oplus T_2|(X_1\oplus X_2)_{T_1\oplus T_2}(\bar{D}_i))\subseteq\bar{D}_i\subseteq G_i\quad(i=1,2,\cdots,n),$$

同时

$$X_1\oplus X_2=\sum_{i=1}^n(X_1\oplus X_2)_{T_1\oplus T_2}(\bar{D}_i),$$

故$T_1\oplus T_2$是可分解算子.

反之,设$T_1\oplus T_2$是可分解算子.令$\{G_i\}_{i=1}^n$是$\sigma(T_1)$的有限开复盖,取$\{D_i\}_{i=1}^n$是$\sigma(T_1)$的另一开复盖,使得$\bar{D}_i\subseteq G_i$ $(i=1,2)$.再取开集D_0,使得$\{D_i\}_{i=0}^n$做成$\sigma(T_1\oplus T_2)=$

$\sigma(T_1)\cup\sigma(T_2)$的开复盖，且使$\bar{D}_0\cap\sigma(T_1)=\phi$。于是

$$X_1\oplus X_1=\sum_{i=0}^{n}(X_1\oplus X_2)_{T_1\oplus T_2}(\bar{D}_i).$$

由第二章命题 4.3

$$(X_1\oplus X_2)_{T_1\oplus T_2}(\bar{D}_i)=X_{1T_1}(\bar{D}_i)\oplus X_{2T_2}(\bar{D}_i),$$

于是

$$X_1\oplus X_2=\sum_{i=0}^{n}X_{1T_1}(\bar{D}_i)\oplus\sum_{i=0}^{n}X_{2T_2}(\bar{D}_i),$$

从而

$$X_1=\sum_{n=0}^{n}X_{1T_1}(\bar{D}_i)$$

注意 $X_{1T_1}(\bar{D}_i)$ $(i=0,1,2,\cdots,n)$是T_1的谱极大空间，故

$$\sigma(T_1|X_{1T_1}(\bar{D}_i))\subseteq\bar{D}_i\cap\sigma(T_1)$$
$$(i=0,1,2,\cdots n).$$

这样

$$\sigma(T_1|X_{1T_1}(\bar{D}_0))=\phi,$$

于是

$$X_{1T_1}(\bar{D}_0)=\{0\},$$

故

$$X_1=\sum_{i=1}^{n}X_{1T_1}(\bar{D}_i),\quad \sigma(T_1|X_{1T_1}(\bar{D}_i))\subseteq G_i$$
$$(i=1,2,\cdots,n).$$

因此 T_1是可分解算子。类似地可证T_2亦是可分解算子。

命题 4.2 $T\in\mathscr{B}(X)$ 是可分解算子，$\sigma\subseteq\sigma(T)$ 是谱集合，则$T|E(\sigma)X$ 是可分解算子，这里

$$E(\sigma)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}R(\lambda,T)d\lambda$$

Γ 是σ的允许围道。

证明 由Riesz-Dunford 函数演算

$$E(\sigma)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}R(\lambda,T)d\lambda$$

是与T可变换的射影算子。令$E(\sigma^c)=I-E(\sigma)$。则

$$X=E(\sigma)X\oplus E(\sigma^c)X,$$

$$T=T|E(\sigma)X\oplus T|E(\sigma^c)X.$$

由命题 4.2 知，$T|E(\sigma)X$是可分解算子。

定理 4.1 $T\in\mathscr{B}(X)$是可分解算子，$f:G\to\mathbb{C}$ ($G\supseteq\sigma(T)$是开集)是解析函数，则 $f(T)$ 是可分解算子。

证明 显然不妨设f是非常数，由命题 4.2 不妨设G是连通集。由第二章命题 4.1，$f(T)$是(AC)算子，而且

$$X_{f(T)}(F)=X_T(f^{-1}(F)),\ F\in\mathscr{F}.$$

令 $\{G_i\}_{i=1}^n$ 是$\sigma(f(T))=f(\sigma(T))$的开复盖。取另一开复盖$\{D_i\}_{i=1}^n$，使得 $\bar{D}_i\subseteq G_i$ $(i=1,\cdots,n)$。于是$\{f^{-1}(D_i)\}_{i=1}^n$ 是$\sigma(T)$的开复盖。又$\overline{f^{-1}(D_i)}\subseteq f^{-1}(\bar{D}_i)$ $(i=1,\cdots,n)$，从而

$$X=\sum_{i=1}^n X_T(\overline{f^{-1}(D_i)})=\sum_{i=1}^n X_T(f^{-1}(\bar{D}_i)).$$

于是

$$X=\sum_{i=1}^n X_{f(T)}(\bar{D}_i).$$

由于$f(T)$是(AC)算子，故$X_{f(T)}(\bar{D}_i)$是$f(T)$的谱极大空间，从而

$$\sigma(f(T)|X_{f(T)}(\bar{D}_i))\subseteq\bar{D}_i\subseteq G_i\quad(i=1,\ \cdots,\ n).$$

定义 4.1 $T\in\mathscr{B}(X)$ 称为强可分解算子（Strongly decomposable operator），若对$\sigma(T)$的任意开复盖 $\{G_i\}_{i=1}^n$ 及谱极大空间 Y，皆存在 T之谱极大空间 $\{Y_i\}_{i=1}^n$，使得

$$Y=\sum_{i=1}^n Y\cap Y_i,\quad \sigma(T|Y_i)\subseteq G_i$$

$$(i=1,\ \cdots,\ n).$$

定理 4.2 $T\in\mathscr{B}(X)$ 是强可分解算子当且仅当对任意谱极大空间 Y，$T_Y\in\mathscr{B}(Y)$是强可分解算子。

证明 充分性是显然的，往证必要性。令 $\{G_i\}_{i=1}^n$ 是 $\sigma(T_Y)$之任意开复盖，Z是T_Y的任意谱极大空间。显然 $Z\subseteq Y$. 做开集G_0，使$\{G_i\}_{i=0}^n$构成 $\sigma(T)$ 开复盖，且$\bar{G}_0\cap\sigma(T_Y)=\phi$. 注意$Z$亦是$T$的谱极大空间，由$T$是强可分解算子，按定义4.1，存在$T$之谱极大空间族$\{Y_i\}_{i=0}^n$，使得

$$Z=\sum_{i=0}^n Z\cap Y_i,\ \sigma(T|Y_i)\subseteq G_i\ (i=0,1,\cdots,n)$$

令$Z_i=Z\cap Y_i\subseteq Y$ $(i=0,1,\cdots,n)$，Z_i是T_Y 的谱极大空间。由第二章命题1．2推论，

$$\begin{aligned}\sigma(T_Y|Z_i)&=\sigma(T|Y\cap Z_i)\\&=\sigma(T|Z\cap Y_i)\\&\subseteq\sigma(T|Z)\cap\sigma(T|Y_i)\\&\subseteq G_i\qquad(i=0,\ 1,\ \cdots,\ ).\end{aligned}$$

特别

$$\begin{aligned}\sigma(T_Y|Z_0)&\subseteq\sigma(T|Z)\cap G_0\\&\subseteq\sigma(T_Y)\cap G_0\\&=\phi,\end{aligned}$$

故 $Z_0=\{0\}$。这样，

$$Z=\sum_{i=1}^{n} Z\cap Z_i, \quad \sigma(T_I|Z_i)\subseteq G_i \quad (i=1,\cdots$$

因此T_Y是强可分解算子.

命题 4.3 $T\in\mathscr{B}(X)$ 是强可分解算子，Y 是T 的谱极大空间，又$\hat{Z}$是 $T^Y\in\mathscr{B}(X/Y)$的谱极大空间，则

$$Z=\{z|z\in X,\ \hat{z}\in\hat{Z}\}$$

是T 的谱极大空间.

证明 显然$Z\in\text{Lat }T$，T 是(AC) 算子，故 $X_T(\sigma(T|Z))$ T 是的谱极大空间，且

$$Y\subseteq Z\subseteq X_T(\sigma(T|Z)).$$

注意T是强可分解算子，$T|X_T(\sigma(T|Z))$ 是可分解算子，由定理1.3,

$$\sigma([T|X_T(\sigma(T|Z))]_Y)$$
$$=\overline{\sigma(T|X_T(\sigma(T|Z))}$$
$$\setminus\overline{\sigma(T|Y)}\subseteq\overline{\sigma(T|Z)\setminus\sigma(T|Y)}$$

由命题 2.1及命题 2.2

$$\sigma(T|Z)=\sigma(T|Y)\cup\sigma((T|Z)^Y).$$

故

$$\sigma([T|X_T(\sigma(T|Z))]^Y)\subseteq\sigma((T|Z)^Y).$$

于是

$$\sigma(T^Y|X_T(\sigma(T|Z))/Y)\subseteq\sigma(T^Y|Z/Y)=\sigma(T^Y|\hat{Z}).$$

而Z是T^Y 的谱极大空间，所以

$$X_T(\sigma(T|Z))/Y\subseteq\hat{Z}.$$

这样

$$X_T(\sigma(T|Z))\subseteq Z.$$

总之，$Z=X_T(\sigma(T|Z))$是T的谱极大空间。

定理 4.3 $T\in\mathscr{B}(X)$是强可分解算子当且仅当对T之任意谱极大空间Y，$T^Y\in\mathscr{B}(X/Y)$ 是强可分解算子.

证明 充分性是显然的，往证必要性. 令$\{G_i\}_{i=1}^n$是$\sigma(T^Y)$的有限开复盖，做一开集G_0，使得$\{G_i\}_{i=0}^n$是$\sigma(T)$的开复盖，且$\bar{G}_0\cap\sigma(T^Y)=\phi$。这样，对$T^Y$的任意谱极大空间$\hat{Z}$，由命题4.3，

$$Z=\{z\,|\,z\in X,\hat{z}\in\hat{Z}\}.$$

是T的谱极大空间，从而存在T之谱极大空间$\{Y_i\}_{i=0}^n$，使得

$$Z=\sum_{i=0}^{n}Z\cap Y_i,\ \sigma(T|Y_i)\subseteq G_i\quad(i=0,1,\cdots,n).$$

令$K_i=\sigma(T|Y_i)\,(i=0,1,\cdots,n)$，$K=\sigma(T|Y)$，则$Y_i=X_T(K_i)$ $(i=0,1,\cdots,n)$，$Y=X_T(K)$。由命题2.5，

$$(X/X_T(K))_{T^{X_T(K)}}(K_i\cup K)=X_T(K_i\cup K)/X_T(K)\quad(i=0,1,\cdots,n).$$

显然它们是T^Y之谱极大空间，而且

$$\begin{aligned}&\sigma(T^Y|(X/Y)_{T^Y}(K_i\cup K))\\&=\sigma(T^Y|X_T(K_i\cup K)/X_T(K))\\&=\sigma([T|X_T(K_i\cup K)]^Y)\\&=\overline{\sigma(T|X_T(K_i\cup K))\setminus\sigma(T|Y)}\\&\subseteq\overline{(K_i\cup K)\setminus K}\\&\subseteq\overline{K_i\setminus K}\\&\subseteq K_i\\&\subseteq G_i\quad(i=0,1,\cdots,n).\end{aligned}$$

特别

$$\sigma(T^Y|(X/Y)_{T^Y}(K_0\cup K))\subseteq G_0\cap\sigma(T^Y)=\phi$$

因此

$$(X/Y)_{T^Y}(K_0\cup K)=\{\hat{0}\}.$$

这样，从

$$Z=\sum_{i=0}^{n}Z\cap Y_i=\sum_{i=0}^{n}Z\cap X_T(K_i\cup K)$$

可知

$$\hat{Z}=\sum_{i=0}^{n}\hat{Z}\cap X_T(K_i\cup K)/X_T(K)$$
$$=\sum_{i=0}^{n}\hat{Z}\cap (X/Y)_{T^Y}(K_i\cup K)$$
$$=\sum_{i=1}^{n}\hat{Z}\cap (X/Y)_{T^Y}(K_i\cup K)$$

因此T^Y是强可分解算子。

§5 对偶理论

命题 5.1 $T\in\mathscr{B}(X)$是可分解算子，则对每个$F\in\mathscr{F}$，$X(F^c)^{\perp}$是T^*的谱极大空间，且

$$\sigma(T^*|X_T(F^c)^{\perp})\subseteq F,\quad F\in\mathscr{F}.$$

证明 不难看出$X_T(F^c)^{\perp}\in\text{LatT}^*$。首先证明

$$\sigma(T^*|X^T\ (F^c)^{\perp})\subseteq F,\ F\in\mathscr{F}.$$

令$\lambda\in F^c$，取开集G，使$F\subseteq G$，而且$\lambda\notin G$，$\{G,F^c\}$是$\sigma(T)$的开复盖。则存在T的谱极大空间$\{Y_1,Y_2\}$，使

$$X=Y_1+Y_2,\sigma(T|Y_1)\subseteq G,\sigma(T|Y_2)\subseteq F^c.$$

显然$Y_2\subseteq X_T(F^c)$，而$\lambda I-T|Y_1$是有有界逆的。

若$x^*\in X_T(F^c)^{\perp}$，使得$(\lambda I-T^*)x^*=0$，对任给的$x\in X$，

$$x=x_1+x_2,\qquad x_i\in X_i\qquad (i=1,2),$$

我们有

$$\langle x,x^*\rangle=\langle x_1,x^*\rangle+\langle x_2,x^*\rangle$$
$$=\langle x_1,x^*\rangle.$$

由于$\lambda I-T|Y_1$有有界逆，存在$y_1\in Y_1$，使得

$$(\lambda I-T)y_1=x_1.$$

于是

$$\langle x,x^*\rangle=\langle x_1,x^*\rangle$$

$$= \langle (\lambda I - T) y_1, x^* \rangle$$
$$= \langle y_1, (\lambda I - T^*) x^* \rangle$$
$$= 0.$$

可见$x^* = 0$。这证明了$\lambda I - T^* | X_T(F^c)^\perp$是单射的. 往证$\lambda I - T^* | X_T(F^c)^\perp$是满射的。

若$x^* \in X_T(F^c)^\perp$，对每个$x \in X$，有

$$x = x_1 + x_2, \qquad x_i \in Y_i \qquad (i = 1, 2).$$

定义线性泛函u：

$$\langle x, u \rangle = \langle R(\lambda, T | Y_1) x_1, x^* \rangle .$$

这样定义的u不依赖于x的分解。因若另有$x = x_1' + x_2'$，$x_i' \in Y_i$ $(i = 1, 2)$，则$x_1 - x_1' = x_2' - x_2 \in Y_1 \cap Y_2$，$Y_1 \cap Y_2$是$T$的谱极大空间. 故

$$\sigma(T | Y_1 \cap Y_2) \subseteq \sigma(T | Y_1) \cap \sigma(T | Y_2).$$

因此$\lambda \in \rho(T | Y_1 \cap Y_2)$。于是

$$R(\lambda, T | Y_1)(x_1 - x_1')$$
$$= R(\lambda, T | Y_1 \cap Y_2)(x_1 - x_1') \in Y_1 \cap Y_2 \subseteq X_T(F^c).$$

故

$$\langle R(\lambda, T | Y_1)(x_1 - x_1'), x^* \rangle = 0.$$

亦即

$$\langle R(\lambda, T | Y_1) x_1, x^* \rangle = \langle R(\lambda, T | Y_1) x_1', x^* \rangle .$$

这表明u的定义是合理的。考虑线性映射S：$Y_1 \oplus Y_2 \to X$，

$$S(x_1 \ominus x_2) = x_1 + x_2, \quad x_i \in Y_i \quad (i = 1, 2).$$

显然S是连续的满射，由闭图形定理，存在常数$M > 0$，使得对任何$x \in Z$，有$x_i \in Y_i$ $(i = 1, 2)$，

$$\|x_1\| + \|x_2\| \leqslant M \|x_1 + x_2\| = M \|x\|.$$

我们有

$$|\langle x, u \rangle| = |\langle R(\lambda, T | Y_1) x_1, x^* \rangle$$
$$\leqslant \|R(\lambda, T | Y_1)\| \|x_1\| \|x^*\|$$
$$\leqslant M \|R(\lambda, T | Y_1)\| \|x^*\| \|x\|.$$

故$u\in X^*$．再证明$u\in X_T(F^c)^\perp$．

令$x\in X_T(F^c)$，　则$x=x_1+x_2$，　$x_i\in Y_i\ (i=1,2)$．由$x,x_2\in X_T(F^c)$，可见$x_1\in X_T(F^c)$，即$\sigma_T(x_1)\subseteq F^c$．从而

$$\sigma(R(\lambda,T|Y_1)x_1)\subseteq\sigma_T(x_1)\subseteq F^c$$

所以　$R(\lambda,T|Y_1)x_1\in X_T(F^c)$，故

$$\langle x,u\rangle = \langle R(\lambda,T|Y_1)x_1,x^*\rangle = 0,$$

亦即$u\in X_T(F^c)^\perp$．对任意$x\in X$，

$$x=x_1+x_2,\quad x_i\in Y_i\quad (i=1,2),$$

$$(\lambda I-T)x=(\lambda I-T)x_1+(\lambda I-T)x_2,$$

$$(\lambda I-T)x_i\in Y_i\quad (i=1,2).$$

于是

$$\begin{aligned}\langle(\lambda I-T)x,u\rangle &= \langle R(\lambda,T|Y_1)(\lambda I-T)x_1,x^*\rangle\\ &= \langle x_1,x^*\rangle\\ &= \langle x_1+x_2,x^*\rangle\\ &= \langle x,x^*\rangle,\end{aligned}$$

故

$$\langle x,(\lambda I-T^*)u\rangle = \langle x,x^*\rangle,$$

所以

$$(\lambda I-T^*)u=x^*,$$

故$\lambda I-T^*|X_T(F^c)^\perp$是满射的．总之

$$\lambda\notin\sigma(T^*|X_T(F^c)^\perp).$$

所以

$$\sigma(T^*|X_T(F^c)^\perp\subseteq F,\quad F\in\mathscr{F}.$$

最后证明$X_T(F^c)^\perp$是T^*的谱极大空间．令Z^*是T^*的不变子空间，而且

$$\sigma(T^*|Z^*)\subseteq\sigma(T^*|X_T(F^c)^\perp)\subseteq F.$$

从而

$$\sigma(T^*|Z^*)\subseteq F.$$

设$u\in Z^*$，对任何$x\in X_T(F^c)$，定义函数f：$\mathbb{C}\to\mathbb{C}$，

$$f(\lambda)=\begin{cases}\langle \tilde{x}(\lambda),u\rangle, & \lambda\in\rho_T(x),\\ \langle x,R(\lambda,T^*|Z^*)u\rangle, & \lambda\in F^c.\end{cases}$$

对于$\lambda\in\rho_T(x)\cap F^c$，

$$\begin{aligned}\langle x,R(\lambda,T^*|Z^*)u\rangle &=\langle (\lambda I-T)\tilde{x}(\lambda),R(\lambda,T^*|Z^*)u\rangle\\ &=\langle \tilde{x}(\lambda),(\lambda I-T^*)R(\lambda,T^*|Z^*)u\rangle\\ &=\langle \tilde{x}(\lambda),u\rangle.\end{aligned}$$

可见f的定义是完善的．而$f(\lambda)$是$\mathbb{C}$上的解析函数，又$\lambda\to\infty$时，$\tilde{x}(\lambda)=R(\lambda,T)x\to 0$，故$\lim\limits_{\lambda\to\infty}f(\lambda)=0$．由Liouville定理，$f(\lambda)=0$。故

$$\lambda f(\lambda)=\langle \lambda\tilde{x}(\lambda),u\rangle=0,\quad \lambda\in\rho_T(x).$$

$$\begin{aligned}\langle x,u\rangle &=\lim_{\lambda\to\infty}\langle (\lambda I-T)\tilde{x}(\lambda),u\rangle\\ &=\lim_{\lambda\to\infty}\langle \lambda\tilde{x}(\lambda),u\rangle-\lim_{\lambda\to\infty}\langle T\tilde{x}(\lambda),u\rangle\\ &=-\lim_{\lambda\to\infty}\langle \tilde{x}(\lambda),T^*x\rangle\\ &=0.\end{aligned}$$

所以$u\in X_T(F^c)^\perp$，即$Z^*\subseteq X_T(F^c)^\perp$．因此$X_T(F^c)^\perp$是$T^*$之谱极大空间。

定理 5.1 $T\in\mathscr{B}(X)$是2-可分解算子，则T^*亦是2-可分解算子。

证明 令G是任意开集，$F=G^c$，因此$X_T(F)$是T的谱极大空间。由命题1.6并注意$\overline{G}^c=F$，有

$$\overline{C^c\cap\sigma(T)}\subseteq\sigma(T|X_T(F))\subseteq F\cap\sigma(T).$$

由定理1.3，

$$\sigma(T^{X_T(F)})=\overline{\sigma(T)\diagdown\sigma(T|X_T(F))},$$

故$\lambda\in\overline{G}^c$时，$\lambda\notin\sigma(T^{X_T(F)})$。这样，

$$\sigma(T^{X_T(F)})\subseteq\overline{G}.$$

由Dieudonné对偶定理，$[T|X_T(F)]^*$与$(T^*)^{X_T(F)^\perp}$等同，$[T^{X_T(F)}]^*$与$T^*|X_T(F)^\perp$等同。所以

$$\sigma(T^*|X_T(F)^\perp)=\sigma([T^{X_T(F)}]^*)$$
$$=\sigma(T^{X_T(F)})\subseteq\bar{G},$$
$$\sigma((T^*)^{X_T(F)^\perp})=\sigma([T|X_T(F)]^*)$$
$$=\sigma(T|X_T(F))\subseteq G^c.$$

根据定理2.5,T^*是可分解算子.

命题 5.2 $T\in\mathscr{B}(X)$是可分解算子,则

$$X^*_{T^*}(F)=X_T(F^c)^\perp,\quad F\in\mathscr{F}.$$

证明 由定理5.1,T^*是可分解算子,故$X^*_{T^*}(F)$是T^*的谱极大空间,而且$\sigma(T^*|X^*_{T^*}(F))\subseteq F$. 由命题5.1证明的后半部可见

$$Z^*_{T^*}(F)\subseteq X_T(F^C)^\perp.$$

由$\sigma(T^*|X_T(F^C)^\perp)\subseteq F$,可证明

$$X^T(F^c)^\perp\subseteq X^*_{T^*}(F)$$

于是

$$X^*_{T^*}(F)=X_T(F^c)^\perp,\ F\in\mathscr{F}.$$

定理 5.2 $T\in\mathscr{B}(X)$, T^*是可分解算子, 则T是可分解算子.

证明 设G是任意开集,令$F=G^c$,则F是闭集, 且$F^\circ=\bar{G}^c$, 因T^*是可分解算子,故T^*有性质(AC),$X^*_{T^*}(F)$是T^*谱极大空间.由第二章定 理2.2及本章定理2.2,

$$\sigma(T^*|X^*_{T^*}(F))\subseteq\sigma(T^*)\cap F=\sigma(T)\cap\bar{G}^c.$$

$$\sigma((T^*)^{X^*_{T^*}(F)})\subseteq\sigma(T^*)\setminus F^\circ=\sigma(T)\cap\bar{C},$$

设$Y={}^\perp X^*{}_{T^*}(F)$,则$Y$是$T$之不变子空间,由第二章定理2.3, $X^*{}_{T^*}(F)$是弱*闭的。故由重极定理,

$$Y^\perp=[{}^\perp X^*_{T^*}(F)]^\perp=X^*_{T^*}(F).$$

根据Dieudonné对偶定理,$(T|Y)^*$与$(T^*)^{X^*_{T^*}(F)}$等同, $(T^Y)^*$与$T^*|X^*{}_{T^*}(F)$等同。所以

$$\sigma(T|Y)=\sigma((T|Y)^*)$$

$$= \sigma((T^*)^{X^*_{T^*}(F)}) \subseteq \sigma(T) \cap \bar{G}.$$

$$\sigma(T^Y) = \sigma((T^Y)^*)$$

$$= \sigma(T^* | X^*_{T^*}(F)) \subseteq \sigma(T) \cap G^c.$$

由定理2.5，T是可分解算子。

命题5.3 $T \in \mathscr{B}(X)$，T^*是可分解算子，则对任意$F \in \mathscr{F}$，${}^\perp X^*_{T^*}(F^c)$是T之谱极大空间，且

$$X_T(F) = {}^\perp X^*_{T^*}(F^c), \quad F \in \mathscr{F}.$$

证明 设$\{G_n\}_{n=1}^{\infty}$是一串开集，使$G_n \supseteq F(n=1,2,\cdots)$，且$\bigcap_{n=1}^{\infty} \bar{G}_n = F$. 令$F_n = G_n^c$，则$F_n \in \mathscr{F}(n=1,2,\cdots)$，由定理5.2，$T$是可分解算子。再由命题5.2，

$$X_T(G_n)^\perp = X_T(F_n^c)^\perp$$

$$= X^*_{T^*}(F_n) \qquad (n=1,2,\cdots).$$

注意$F \subseteq G_n$，于是

$$F^c \supseteq G_n^c = F_n \qquad (n=1,2\cdots).$$

因此

$$X^*_{T^*}(F^c) \supseteq X^*_{T^*}(F_n) = X_T(G_n)^\perp,$$

从而

$${}^\perp X^*_{T^*}(F^c) \subseteq {}^\perp[X_T(G_n)^\perp]$$

$$= \overline{X_T(G_n)} \subseteq X_T(\bar{G}_n), \qquad (n=1,2,\cdots).$$

所以

$${}^\perp X^*_{T^*}(F^c) \subseteq \bigcap_{n=1}^{\infty} X_T(\bar{G}_n) = X_T(\bigcap_{n=1}^{\infty} \bar{G}_n) = X_T(F).$$

反之，类似命题5.1后一部分可证明

$$X_T(F) \subseteq {}^\perp X^*_{T^*}(F^c), \quad F \in \mathscr{F}.$$

总之

$${}^\perp X^*_{T^*}(F^c) = X_T(F). \quad F \in \mathscr{F}$$

综合前述，我们就建立了可分解算子及其谱极大空间之对偶理论：

定理 5.3 $T\in\mathscr{B}(X)$是可分解算子当且仅当T^*是可分解算子。而且对任意$F\in\mathscr{F}$，$X_T(F)={}^{\perp}X^*{}_{T^*}(F)$是$T$的谱极大空间，$X^*{}_{T^*}(F)=X_T(F^c)^{\perp}$是$T^*$的谱极大空间。

命题 5.4 $T\in\mathscr{B}(X)$是可分解算子，则对任意开集G，$\overline{X_T(G)}$是T的解析不变子空间，且

$$\sigma(T|\overline{X_T(G)})\subseteq\overline{G\cap\sigma(T)},\quad \sigma(T^{\overline{X_T(G)}})\subseteq G^c.$$

证明 令$F=G^c$，由命题5.2，

$$X^*_{T^*}(F)=X_T(F^c)^{\perp}=X_T(G)^{\perp}.$$

由重极定理，

$$^{\perp}X^*_{T^*}(F)={}^{\perp}[X_T(G)^{\perp}]=\overline{X_T(G)}.$$

由Dieudonné对偶定理，$(T|\overline{X_T(G)})^*$与$(T^*)^{X^*_{T^*}(F)}$等同．故

$$\sigma(T|\overline{X_T(G)})=\sigma([T|\overline{X_T(G)}]^*)=\sigma((T^*)^{X^*_{T^*}(F)}),$$

由定理5.3，T^*是可分解算子，故$X^*_{T^*}(F)$是T^*的谱极大空间．再由定理1.3，

$$\sigma((T^*)^{X^*_{T^*}(F)})=\overline{\sigma(T^*)\setminus\sigma(T^*|X^*_{T^*}(F))}.$$

于是

$$\sigma(T|\overline{X_T(G)})=\overline{\sigma(T^*)\setminus\sigma(T^*|X^*_{T^*}(F))}$$

令f：$\bar{D}\to X$是解析函数，且

$$(\lambda I-T)f(\lambda)\in\overline{X_T(G)},\quad \lambda\in D.$$

不妨设D是连通的．若$D\cap\rho(T|\overline{X_T(G)})\neq\phi$，则存在开园盘$V\subseteq D\cap\rho(T|\overline{X_T(G)})$，使得

$$(\lambda I-T)f(\lambda)\in\overline{X_T(G)},\quad \lambda\in V.$$

令$g(\lambda)=(\lambda I-T)f(\lambda)$，$\lambda\in V$．于是由$T$有性质$(A)$，有

$$f(\lambda)=R(\lambda,T|\overline{X_T(G)})g(\lambda)\in\overline{X_T(G)},\lambda\in V.$$

由解析延拓，$f(\lambda)\in\overline{X_T(G)}$，$\lambda\in D$.

若$D\subseteq\sigma(T|\overline{X_T(G)})$，由前证明，

$$D \subseteq \sigma(T^*) \setminus \sigma(T^* | \overline{X^*_{T^*}(F)}).$$

因D得开集，故

$$D \subseteq \rho(T^* | X^*_{T^*}(F)).$$

当$\lambda \in D$，对任何$y^* \in X^*_{T^*}(F)$，总存在$x^* \in X^*_{T^*}(F)$，使得$y^* = (\lambda I - T^*) x^*$. 于是

$$\begin{aligned} \langle f(\lambda), y^* \rangle &= \langle f(\lambda), (\lambda I - T^*) x^* \rangle \\ &= \langle (\lambda I - T) f(\lambda), x^* \rangle \\ &= 0. \end{aligned}$$

可见

$$f(\lambda) \in {}^{\perp}X^*_{T^*}(F) = \overline{X_T(G)}, \quad \lambda \in D.$$

总之，$\overline{X_T(G)}$是T之解析不变子空间。又

$$\overline{X_T(G)} = \overline{X_T(G \cap \sigma(T))} \subseteq X_T(\overline{G \cap \sigma(T)}),$$

而$\overline{X_T(G \cap \sigma(T))}$亦是$T | X_T(\overline{G \cap \sigma(T)})$之解析不变子空间，故

$$\begin{aligned} \sigma(T | \overline{X_T(G)}) &\subseteq \sigma(T | X_T(\overline{G \cap \sigma(T)})) \\ &\subseteq \overline{G \cap \sigma(T)} \end{aligned}$$

类似地由Dieudonne对偶定理，$(T^{\overline{X_T(G)}})^*$与$T^* | X^*_{T^*}(F)$等同，从$T^*$之可分解性，

$$\begin{aligned} \sigma(T^{\overline{X_T(G)}}) &= \sigma([T^{\overline{X_T(G)}}])^* \\ &= \sigma(T^* | X^*_{T^*}(F)) \subseteq G^c. \end{aligned}$$

§6 St.Frunza猜想

定义6.1 称$T \in \mathscr{B}(X)$具有性质(F)，若T有性质(A)，且对T的任意谱极大空间Y，皆有

$$\sigma_{T^Y}(\hat{x}) = \sigma_T(x) \setminus \overline{\sigma(T_Y)}, \ \hat{x} \in X/Y, x \in \hat{x},$$

所谓St.Frunza猜想就是：有性质(A)的算子皆有性质(F)吗。我们来讨论这一猜想。

定理 6.1 $T \in \mathscr{B}(X)$是(AC)算子，且具有性质(F)，则$T^Y \in \mathscr{B}(X/Y)$是(AC)算子，且

(i) $(X/Y)_{T^Y}(F)=X_T(F\cup\sigma(T_Y))/Y$，$F\in\mathscr{F}$；

(ii) $\sigma(T^Y|(X/Y)_{T^Y}(F))\subseteq F, F\in\mathscr{F}$.

证明 令$\hat{x}\in(X/Y)_{T^Y}(F)$，则$\sigma_{T^Y}(\hat{x})\subseteq F$. 由第一章定理3.4,

$$\sigma_T(x)=[\sigma_T(x)\cap\sigma(T_Y)]\cup\sigma_{T^Y}(\hat{x})\subseteq F\cup\sigma(T_Y),$$

因此

$$x\in X_T(F\cup\sigma(T_Y)),\quad x\in\hat{x},$$

故

$$\hat{x}\in X_T(F\cup\sigma(T_Y))/Y.$$

反之，令$\hat{x}\in X_T(F\cup\sigma(T_Y))/Y$，对于任意$x\in\hat{x}$，

$$x\in X_T(F\cup\sigma(T_Y)),\quad \sigma_T(x)\subseteq F\cup\sigma(T_Y).$$

于是由定义6.1,

$$\sigma_{T^Y}(\hat{x})\subseteq\overline{\sigma_T(x)\setminus\sigma(T_Y)}\subseteq F,$$

故

$$\hat{x}\in(X/Y)_{T^Y}(F),$$

因此T^Y是(AC)算子. 由第二章定理2.2,

$$\sigma(T^Y|(X/Y)_{T^Y}(F))\subseteq F,\quad F\in\mathscr{F}.$$

定理6.2 $T\in\mathscr{B}(X)$是可分解算子，又T有性质(F)，则对T之任意谱极大空间Y，$T^Y\in\mathscr{B}(X/Y)$是可分解算子.

证明 令$\{G_i\}_{i=1}^n$是$\sigma(T^Y)$的开复盖，再做$\sigma(T^Y)$之开复盖$\{D_i\}_{i=1}^n$，使得$\bar{D}_i\subseteq G_i$ $(i=1,\cdots,n)$. 可做另一开集D_0，使得$\bar{D}_0\cap\sigma(T^Y)=\phi$，而且$\{D_i\}_{i=0}^n$复盖$\sigma(T)$，则存在$T$的谱极大空间$\{Y_i\}_{i=0}^n$，使得

$$X=\sum_{i=0}^n Y_i,\ \sigma(T|Y_i)\subseteq D_i\quad(i=0,1,\cdots,n).$$

注意$Y_i\subseteq X_T(\bar{D}_i\cup\sigma(T_Y))$ $(i=0,1,2,\cdots,n)$. 于是

$$X=\sum_{i=0}^n X_T(\bar{D}_i\cup\sigma(T_Y)).$$

这样由定理6.1,

$$X/Y=\sum_{i=0}^{n}X_T(\bar{D}_i\cup\sigma(T_Y))/Y$$

$$=\sum_{i=0}^{n}(X/Y)_{T^Y}(\bar{D}_i),$$

而且

$$\sigma(T^Y|(X/Y)_{T^Y}(\bar{D}_i))\subseteq\bar{D}_i\subseteq G_i\ (i=0,1,\cdots,n).$$

由于

$$\sigma(T^Y|(X/Y)_{T^Y}(\bar{D}_0))\subseteq\bar{D}_0\cap\sigma(T^Y)=\phi,$$

因此

$$(X/Y)_{T^Y}(\bar{D}_0)=\{0\},$$

故

$$X/Y=\sum_{i=1}^{n}(X/Y)_{T^Y}(\bar{D}_i),$$

$$\sigma(T^Y|(X/YT_X(\bar{D}_i))\subseteq G\qquad(i=1,\cdots,n).$$

定理6.3 $T\in\mathscr{B}(X)$是强可分解算子，则T具有性质(F).

证明 令Y是T的任意谱极大空间，由定理4.3，T^Y是强可分解算子，而且$X_T(\sigma_T(x)\cup\sigma(T_Y))/Y$是$T^Y$的谱极大空间。由第一章定理3.4，$\sigma_{T^Y}(\hat{x})\subseteq\sigma_T(x)$，$x\in\hat{x}$。于是

$$\hat{x}\in X_T(\sigma_T(x)\cup\sigma(T_Y))/Y,$$

所以

$$\sigma_{T^Y}(\hat{x})\subseteq\sigma(T^Y|X_T(\sigma_T(x)\cup\sigma(T_Y))/Y).$$

注意

$$T^Y|X_T(\sigma_T(x)\cup\sigma(T_Y))/Y=[T|X_T(\sigma_T(x)\cup\sigma(T_Y))]^Y$$

是可分解算子，因此

$$\sigma(T^Y|X_T(\sigma_T(x)\cup\sigma(T_Y))/Y)$$
$$=\sigma([T|X_T(\sigma_T(x)\cup\sigma(T_Y))]^Y)$$
$$=\sigma(T|X_T(\sigma_T(x)\cup\sigma(T_Y)))\setminus\sigma(T|Y).$$

由第二章定理2.2，

$$\sigma(T|X_T(\sigma_T(x)\cup\sigma(T_Y)))\subseteq\sigma_T(x)\cup\sigma(T_Y),$$

因此

$$\sigma_{T^Y}(\hat{x}) \subseteq \overline{[\sigma_T(x) \cup \sigma(T_Y)] \setminus \sigma(T_Y)} = \overline{\sigma_T(x) \setminus \sigma(T_Y)}$$

但从第一章定理3.4，

$$\overline{\sigma_T(x) \setminus \sigma(T_Y)} \subseteq \sigma_{T^Y}(\hat{x}).$$

所以

$$\sigma_{T^Y}(\hat{x}) = \overline{\sigma_T(x) \setminus \sigma(T_Y)}.$$

定理6.4 $T \in \mathscr{B}(X)$是强可分解算子当且仅当

$$(T^*)_{\overline{X^*_{T^*}(F^c)}^{W^*}}$$

是可分解算子，$F \in \mathscr{F}$。此处

$\overline{X^*_{T^*}(F^c)}^{W^*}$表示$X^*_{T^*}(F^c)$之弱*闭包

证明 必要性。对任意$F \in \mathscr{F}$，$T|X_T(F)$是可分解算子，按定理5.3，$[T|X_T(F)]^*$是可分解算子．据Dieudonne对偶定理，在等距同构意义下，$[T|X_T(F)]^* = (T^*)^{X_T(F)^\perp}$，故$(T^*)^{X_T(F)^\perp}$是可分解算子。由重极定理及定理5.3，

$$X_T(F)^\perp = [{}^\perp X^*_{T^*}(F^c)]^\perp = \overline{X^*_{T^*}(F^c)}^{W^*}.$$

因此$(T^*)^{\overline{X^*_{T^*}(F^c)}^{W^*}}$是可分解算子。

充分性．设$(T^*)^{\overline{X^*_{T^*}(F^c)}^{W^*}}$是可分解算子，取$F = \mathbb{C}$．于是$\overline{X^*_{T^*}(F^c)}^{W^*} = \{0^*\}$。因此$T^*$是可分解算子，从而$T$是可分解算子．

如前，由$[(T|X_T(F)]^*$与$(T^*)^{\overline{X^*_{T^*}(F^c)}^{W^*}}$等同知$[T|X_T(F)]^*$是可分解算子。再由定理5.3知道，$T|X_T(F)$是可分解算子，$F \in \mathscr{F}$．由命题1.3及定理4.2，$T$是强可分解算子．

定理6.5 $T \in \mathscr{B}(X)$，T^*是强可分解算子当且仅当$T^{\overline{X_T(F^c)}}$对任意$F \in \mathscr{F}$是可分解算子。

证明 必要性。设T^*是强可分解算子，故T是可分解算子，且

$$X^*_{T^*}(F) = \overline{X_T(F^c)}^\perp, F \in \mathscr{F}.$$

由于$T^*|X^*_{T^*}(F)$是可分解算子，由Dieudonne定理，

$$T^*|X^*_{T^*}(F)=T^*|\overline{X_T(F^c)}^{\perp}=(\ T^{\overline{X_T(F^c)}}$$

再由定理 5.2,$T^{\overline{X_T(F^c)}}$ 是可分解算子.

充分性. 设$T^{\overline{X_T(F^c)}}$是可分解算子,令$F=\mathbb{C}$,可知$\overline{X_T(F^c)}=\{0\}$.从而$T$是可分解算子,因此$T^*$是可分解算子,于是

$$X^*_{T^*}(F)=\overline{X_T(F^c)}^{\perp},\quad F\in\mathscr{F}.$$

又 $(T^{\overline{X_T(F)^c}})^*$是可分解算子, 所以

$$T^*|X^*_{T^*}(F)=[T^{\overline{X_T(F^c)}}]^*$$

是可分解算子. 因此T^*是强可分解算子.

定理 6.6 $T\in\mathscr{B}(X)$是可分解算子且T^*有性质(F)当且仅当T^*是强可分解算子.

证明 T^*是强可分解算子,故T是可分解算子,再由定理 6.3,T^*有性质(F).往证必要性.令$\{G_i\}_{i=1}^n$是$\mathbb{C}$的有限开复盖,$\{D_i\}_{i=1}^n$是$\mathbb{C}$的另一开复盖,使得$\overline{D}_i\subseteq G_i\ (i=1,\cdots,n)$.又,存在$T$之谱极大空间$\{Y_i\}_{i=1}^n$,使得

$$X=\sum_{i=1}^n Y_i,\quad \sigma(T|Y_i)\subseteq D_i\quad (i=1,\cdots,n).$$

注意

$$Y_i\subseteq\overline{X_T(F^c\cup D_i)},\quad F\in\mathscr{F}\quad (i=1,\cdots,n).$$

从而

$$X=\sum_{i=1}^n\overline{X_T(F^c\cup D_i)},$$

于是

$$X/\overline{X_T(F^c)}=\sum_{i=1}^n\overline{X_T(F^c\cup D_i)}/\overline{X_T(F^c)}.$$

注意

$$T^{\overline{X_T(F^c)}}|\overline{X_T(F^c\cup D_i)}/\overline{X_T(F^c)}.$$
$$=[T|\overline{X_T(F^c\cup D_i)}]^{\overline{X_T(F^c)}}$$

故

$$\sigma([T_{\overline{X_T(F^c)}}]_{\overline{X_T(F^c\cup D_i)}/\overline{X_T(F^c)}}$$

$$=\sigma([T_{\overline{X_T(F^c\cup D_i)}}]^{\overline{X_T(F^c)}},$$

$$=\sigma([(T_{\overline{X_T(F^c\cup D_i)}})^{\overline{X_T(F^c)}}]^*).$$

由Dieudonne对偶定理及定理 5.3，

$$[\overline{X_T(F^c\cup D_i)}/\overline{X_T(F^c)}]^*\cong\overline{X_T(F^c)}^{\perp}\cap[\overline{X_T(F^c\cup D_i)}]^*$$

$$\cong X^*_{T^*}(F)\cap[\overline{X_T(F^c\cup D_i)}]^*.$$

因此

$$\sigma([(T_{\overline{X_T(F^c\cup D_i)}})]^{\overline{X_T(F^c)}}]^*)$$

$$=\sigma([T^{\overline{X_T(F^c\cap D_i)}}]^*|X^*_{T^*}(F)\cap[\overline{X_T(F^c\cap D^i)}]^*).$$

由于

$$[\overline{X_T(F^c\cup D_i)}]^*\cong X^*/\overline{X_T(F^c\cup D_i)}^{\perp}$$

$$=X^*/X^*_{T^*}(F\cap D^c_i),$$

视$X^*_{T^*}(F)\cap[\overline{X_T(F^c\cup D_i)}]^*$为$X^*/X^*_{T^*}(F\cap D^c_i)$的子空间，即为$X^*_{T^*}(F)/X^*_{T^*}(F\cap D^c_i)$，因此

$$\sigma([T_{\overline{X_T(F^c\cup D_i)}}]^*|X^*_{T^*}(F)\cap[\overline{X_T(F^c\cup D_i)}]^*)$$

$$=\sigma((T^*)^{\overline{X_T(F^c\cup D_i)}^{\perp}}|\overline{X_T(F^c)}^{\perp}/\overline{X_T(F^c\cup D_i)}^{\perp})$$

$$=\sigma((T^*)^{X^*_{T^*}(F\cap D^c_i)}|X^*_{T^*}(F)/X^*_{T^*}(F\cap D^c_i)).$$

由于T^*是可分解算子，T^*有性质(F)，由定理 6.1，

$$X^*_{T^*}(F)/X^*_{T^*}(F\cap D^c_i)$$

是$(T^*)^{X^*_{T^*}(F\cap D^c_i)}$的谱极大空间。又

$$F=\overline{F\setminus[F\cap D^c_i]}\cup[F\cap D^c_i]\quad(i=1,\cdots,n),$$

由定理 6.1，

$$\sigma((T^*)^{X^*_{T^*}(F\cap D^c_i)}|X^*_{T^*}(F)/X^*_{T^*}(F\cap D^c_i))$$

$$=\sigma((T^*)^{X^*_{T^*}(F\cap D^c_i)}|X^*_{T^*}(\overline{F\setminus[F\cap D^c_i]}$$

$$\cup[F\cap D^c_i])/X^*_{T^*}(F\cap D^c_i))\subseteq\overline{F\setminus[F\cap D^c_i]}$$

$$
\begin{aligned}
&= \overline{F \cap [F^c \cup D_i]} \\
&= \overline{F \cap D_i} \\
&= \subseteq G_i \qquad (i = 1, \cdots, n).
\end{aligned}
$$

因此

$$X/X_T(\overline{F}) = \sum_{i=1}^{n} X_T(F \cup D_i)/X_T(F^c),$$

而且

$$\sigma(T^{X_T(F^c)}) \mid \overline{X_T(F^c \cup D^i)/X_T(F^c)} \subseteq G_i \ (i = 1, \cdots, n).$$

这说明 $T^{X_T(F^c)}$ 是谱可分解算子，由定理2.4知道$T^{X_T(F^c)}$是可分解算子，证毕。

类似可证明：

定理6.7 $T \in \mathscr{B}(X)$，T^*是可分解算子且T有性质(F)当且仅当T是强可分解算子。

由可分解算子的对偶定理5.3知：

定理6.8 $T \in \mathscr{B}(X)$是可分解算子且有性质(F)当且仅当T是强可分解算子。

可见对一般可分解算子未必有性质(F)

例 令T是著名的E. Albrecht算子，则T是非强可分解的可分解算子，这样的T便是不具有性质(F)的可分解算子。

定理6.9 $T \in \mathscr{B}(X)$，T^*是强可分解算子当且仅当对任意开或闭集，$T|\overline{X_T(F^c)}$是可分解算子。

证明 充分性。由于

$$
\begin{aligned}
(T^*)^{X^*_{T^*}(F)} &= (T^*)^{\overline{X^*_{T^*}(F^c)}^{\perp}} \\
&= (T| \ X_T(F^c))^*, \quad F \in \mathscr{F}.
\end{aligned}
$$

故$(T^*)^{X^*_{T^*}(F)}$是可分解算子，由定理4.3知T^*是强可分解算子。

必要性。由定理4.3，$(T^*)^{X^*_{T^*}(F)}$是可分解算子，又

$X^*_{T^*}(F) = \overline{X_T(F^c)}^{\perp}$，故$(T^*)^{\overline{X_T(F^c)}^{\perp}}$是可分解算子。

由Dieudonne对偶定理，$(T|X_T(F^c))^*$可分是解算子，所以$T|\overline{X_T(F^c)}$是可分解算子.

§7 充分性判据

本节给出一些谱位于Jordan曲线上的算子是可分解的充分性判断方法.

命题 7.1 设$T\in\mathscr{B}(X)$，J是可求长的Jordan曲线，且$\sigma(T)\subseteq J$；又设对J的每个闭子孤F(未必连通)，使得

(i) $X_T(F)$是闭的，

(ii) $\sigma(T^{X_T(F)})\subseteq\overline{J\setminus F}$；

则对J之任意两个闭子弧F_1,F_2，若$F_1\cap F_2$不包含弧立点时，必有

$$X_T(F_1\cap F_2)=X_T(F_1)+X_T(F_2).$$

证明 不失一般性，可设$F_1\cup F_2$是连通的. 先证明当$F_1\cup F_2\supseteq\sigma(T)$时，

$$X=X_T(F_1)+X_T(F_2).$$

令$F=F_1\cap F_2$. 由假设F是闭子弧，于是

$$\sigma(T^{X_T(F)})\subseteq\overline{J\setminus F}=\overline{(J\setminus F_1)\cup(J\setminus F_2)}$$

这说明$\sigma(\Gamma^{X_T(F)})$是两个互不相交的闭子集之并. 令

$$\tau_1=\overline{J\setminus F_2}\cap\sigma(T^{X_T(F)}),\tau_2=(J\setminus F_1\cap\sigma(T^{X_T(F)}),$$

则

$$\sigma(T^{X_T(E)})=\tau_1\cup\tau_2;$$

而且$\tau_i\subseteq F_i$ $(i=1,2)$. 根据Riesz分解定理，

$$X/X_T(F)=E(\tau_1)(X/X_T(F))\oplus E(\tau_2)(X/X_T(F)).$$

设π是从X到$X/X_T(F)$上的典型映射，令

$$Y_i=\pi^{-1}(E(\tau_i)X/X_T(F)).$$

于是$Y_i\in\mathrm{Lat}T$ $(i=1,2)$. 又$X_T(F)\subseteq Y_i$，故

$X_T(F)$是$T|Y_i\ (i=1,2)$的谱极大空间，所以

$$\sigma(T|Y_i)=\sigma(T|X_T(F))\cup\sigma((T|Y_i)^{X_T(F)})$$
$$\subseteq F\cup\tau_i\subseteq F_i\quad (i=1,2).$$

因此

$$Y_i\subseteq X_T(F_i)\quad (i=1,2).$$

这样

$$X=\pi^{-1}(X/X_T(F))$$
$$=\pi^{-1}(E(\tau_1)X/X_T(F))+\pi^{-1}(E(\tau_2)X/X_T(F))$$
$$=Y_1+Y_2\subseteq X_T(F_1)+X_T(F_2).$$

所以

$$X=X_T(F_1)+X_T(F_2).$$

其次，设$Y=X_T(F_1\cup F_2)$，$S=T|Y$.往证S满足(i),(ii).
注意

$$\sigma(S)=\sigma(T|X_T(F_1\cup F_2))\subseteq F_1\cup F_2\subseteq J.$$

对任意闭子弧F，

$$Y_S(F)=Y\cap X_T(F)=X_T(F\cap(F_1\cup F_2));$$

可见$Y_S(F)$是闭的.又$Z=Y_S(F)$，则Y/Z是T^Z的谱极大空间，而

$$T^Z|Y/Z=[T|Y]^Z=S^Z,$$

所以

$$\sigma(S^Z)=\sigma(T^Z|Y/Z)\subseteq\sigma(T^Z).$$

又T满足条件(ii)，故

$$\sigma(T^Z)=\sigma(T^{X_T(F\cap(F_1\cup F_2))})\subseteq\overline{J\setminus[F\cap(F_1\cup F_2)]}$$

所以

$$\sigma(S^Z)\subseteq\overline{J\setminus[F\cap(F_1\cup F_2)]}=\overline{(J\setminus F)\cup[J\setminus(F_1\cup F_2)]}.$$

由于

$$\sigma(S^Z)\subseteq\sigma(S)\subseteq F_1\cup F_2,$$

所以

$$\sigma(S^{Y_S(F)})\subseteq\overline{J\setminus F}\cup\{a,b\},$$

这里a,b是$F_1\cup F_2$的端点。如果a(或b)$\in\sigma(S^Z)$，则a(或b)不可能是F的内点，故a(或b)$\in\overline{J\setminus F}$。总之，$\sigma(S^{Y_s(E)})\subseteq\overline{J\setminus F}$。由第一段的证明，

$$Y=Y_s(F_1)+Y_s(F_2);$$

即

$$X_T(F_1\cup F_2)=X_T(F_1)+X_T(F_2).$$

证毕

由归纳法不难证明：

推论 若T满足命题7.1中的条件，又设$F_j(j=1,\cdots,n)$是J之闭子弧，而且对$1\leqslant i,j\leqslant n$，$F_i\cap F_j$不含有孤立点，则

$$X_T(\bigcup_{j=1}^n F_j)=\sum_{j=1}^n X_T(F_j).$$

定理 7.1 设T满足命题7.1的条件，则T是可分解算子。

证明 设$\{G_i\}_{i=1}^n$是$\sigma(T)$的开复盖，对每个$\lambda\in\sigma(T)\cap G_i\subseteq J\cap G_i$，在$J$上取一个包含$\lambda$的开子弧$(a_{i\lambda},b_{i\lambda})$，使闭子弧$[a_{i\lambda},b_{i\lambda}]\subseteq G_i\ (i=1,\cdots,n)$。如果$\lambda\in\sigma(T)\cap G_i\cap G_j$，则取$(a_{i\lambda},b_{i\lambda})=(a_{j\lambda},b_{j\lambda})$。这样，我们得到$J$的一族开子弧

$$\{(a_{i\lambda},b_{i\lambda})\}_{i=1}^n,\quad \lambda\in\sigma(T);$$

它复盖$\sigma(T)$。又$\sigma(T)$是紧子弧，由Borel有限复盖定理，必存在有限子复盖

$$\{(a_{ij},b_{ij});\ j=1,\cdots,n_i,i=1,\cdots,n\}$$

满足条件：

$$F_{ij}=[a_{ij},b_{ij}]\subseteq G_i\qquad(j=1,\cdots,n_i;i=1,\cdots,n).$$

若必要可适当延长这些子弧，还可以使每两个子弧的交都不包含孤立点，于是由命题7.1之推论，

$$Y_i=X_T(\bigcup_{j=1}^{n_i}F_{ij})=\sum_{j=1}^{n_i}X_T(F_{ij})\quad(i=1,\cdots,n).$$

由假设，Y_i都是闭的，因此是T的谱极大空间，而且

$$\sigma(T|Y_i)\subseteq\sigma(T|X_T(\bigcup_{j=1}^{n_i}F_{ij}))$$

$$\subseteq\bigcup_{j=1}^{n_i}F_{ij}\subseteq G_i\quad(i=1,\cdots,n)$$

又由命题7.1之推论

$$\sum_{i=1}^{n}Y_i=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n_i}X_T(F_{ij})$$

$$=X_T(\bigcup_{i=1}^{n}\bigcup_{j=1}^{n_i}F_{ij})$$

$$=X$$

命题7.2 设J是有向的 C^2-Jordan 曲线；假设对每个点$a\in J$,存在一对开的逐段光滑的 Jordan弧L_a,L_a^*和一对具有如下性质的非零函数f_a,f_a^*：

a) $L_a\cap J=L_a^*\cap J=\{a\}$,$L_a$位于 L_a^* 的正向;

b) 对每个$b\in J,b\neq a$,存在一对光滑的Jordan 曲线J_{ab},J_{ab}^*使$L_a\cup L_b^*\subseteq J_{ab}$ ($L_a^*\cup L_b\subseteq J_{ab}^*$),$J$上的弧段$(a,b)$ ((b,a)) 位于J_{ab} (J_{ab}^*)内部,f_a (f_a^*) 在J_{ab} (J_{ab}^*)内解析且有到边界的连续扩张(图4);

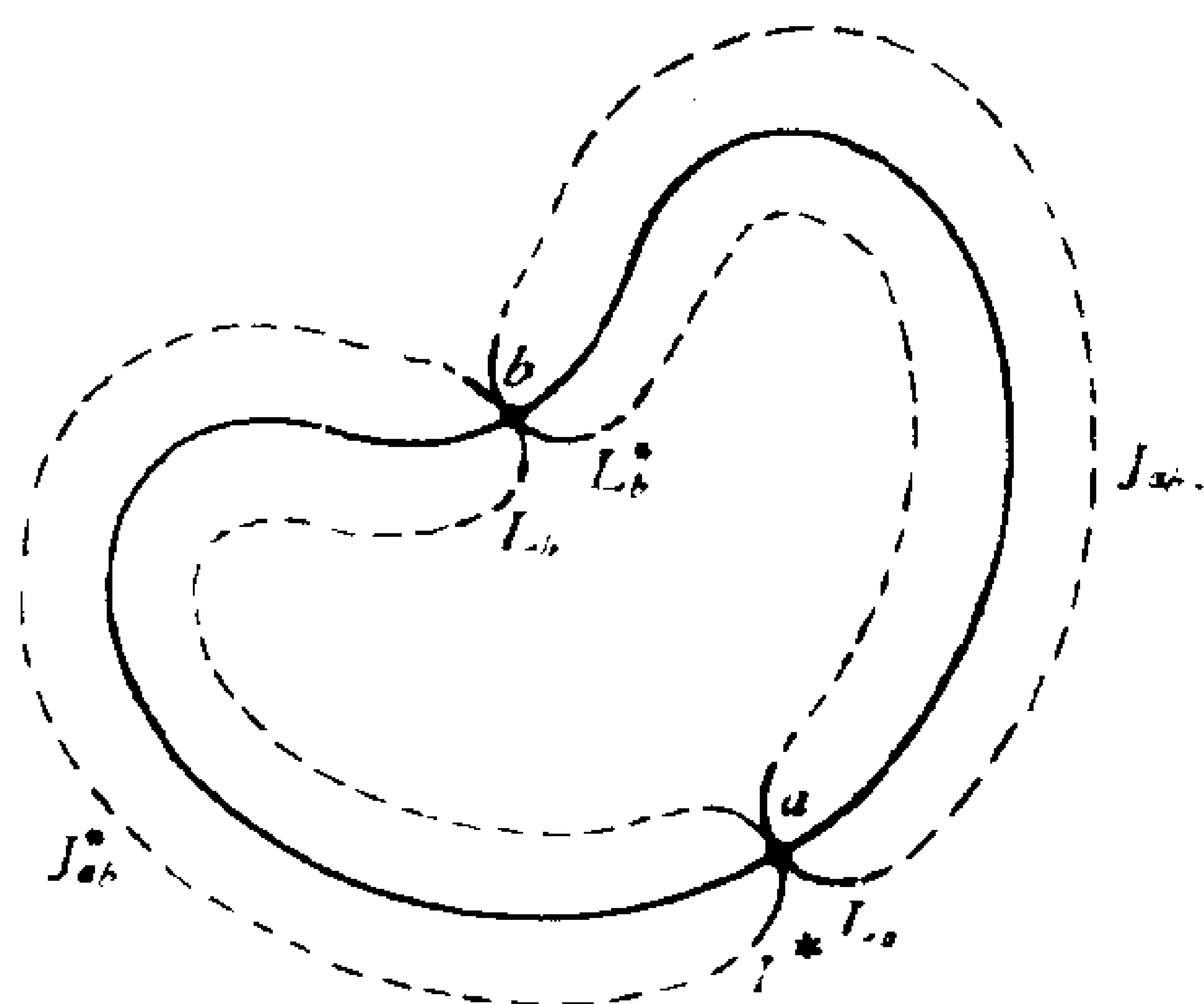


图4

c) $\|f_a(z)(z-T)^{-1}\|+\|f_a^*(z)(z-T)^{-1}\|\leq M$, 对于$z\in(L_a\cup L_a^*)\setminus\{a\}$.此处$M$是与$z$无关的常数. 则对$J$之每个闭子弧$F$(未必连通)有

(i) $X_T(F)$是闭的;

(ii) $X_T(F) \neq \{0\}$，当$F^\circ \cap \sigma(T) \neq \phi$，这里$F^\circ$表示闭包为$F$的开子弧。

证明 令$[a,b]$是$J\setminus F$之任意闭子弧，不失一般性，可设$J_{ab}=J^*_{ba}$．令$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$是$X_T(F)$中一个Cauchy列，$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x$，用$\tilde{x}_n(z)$表示$R(z,T)x_n$，$z\in\rho(T)$到$F^c(X)$的最大解析扩张．由所设条件，有

$$\lim_{\substack{X\to a\\ X\in J_{ab}}}(z-a)(z-b)f_a(z)f^*_a(z)\tilde{x}_n(z)$$

$$=\lim_{\substack{g\to b\\ g\in J^*_{ab}}}(z-a)(z-b)f_a(z)f^*_a(z)\tilde{x}_n(z)$$

$$=0,$$

且关于n是一致的．这样存在开子弧N_a，$N_b\subseteq J_{ab}(J^*_{ab})$，使得$N_a$包含$a$（$N_b$包含$b$），

$$\|y_n(z)\|<\varepsilon/2,\quad z\in N_a\cup N_b\ (n=1,2,\cdots).$$

其中

$$y_n(z)=(z-a)(z-b)f_a(z)f^*_a(z)\tilde{x}_n(z).$$

由于$x_n\to x$，所以

$$\lim_{n\to\infty}y_n(z)=(z-a)(z-b)f_a(z)f_a{}^*(z)R(z,T)x$$

关于$z\in J_{ab}\setminus[N_a\cup N_b]$是一致的．于是存在$n_0$，使得

$$\|y_n(z)-y_m(z)\|<\varepsilon,z\in J_{ab}(J^*_{ab}),m,n\geqslant n_0,$$

从而$\{y_n(z)\}$收敛．由最大模原理，存在$J_{ab}(J^*_{ab})$内部的解析数函$y(z)$，得使

$$y(z)=\lim_{n\to\infty}(z-a)(z-b)f_a(z)f^*_a(z)\tilde{x}_n(z),$$

而且

$$(z-T)\frac{y(z)}{(z-a)(z-b)f_a(z)f_a{}^*(z)}=x,\quad z\neq a,b.$$

这表明，$x\in X_T(J\setminus[a,b])$，又$(a,b)$是$J\setminus F$中任意开弧；故$x\in X_T(F)$。从而$X_T(F)$是闭的。

令$F^\circ\cap\sigma(T)\neq\phi$，不妨设$F=[a,b]$，定义

$$A=\int_{J_{ab}} f_a(z)f_b^*(z)(z-T)^{-1}dz.$$

显然$A\in\mathscr{B}(X)$. $f_a(z)$, $f_b^*(z)$不为零，必存在$\mu\in F^\circ\cap\sigma(T)$，使得$f_a(\mu)\neq o$, $f_b^*(\mu)\neq o$. 注意μ在近似点谱中，对任何$\varepsilon>0$，存在单位向量x，使得

$$(\mu I-T)x=w,\quad \|w\|<\varepsilon.$$

由

$$(z-T)^{-1}x=(z-\mu)^{-1}x-(z-\mu)^{-1}(z-T)^{-1}w,$$

我们有

$$\begin{aligned}Ax&=\int_{J_{ab}} f_a(z)f_b^*(z)(z-T)^{-1}x\,dz\\&=\int_{J_{ab}}\frac{f_a(z)f_b^*(z)}{z-\mu}dz\cdot x\\&\qquad-\int_{J_{ab}}(z-\mu)^{-1}f_a(z)f_b^*(z)(z-T)^{-1}w\,dz\\&=2\pi i f_a(\mu)f_b^*(\mu)x\\&\qquad-\int_{J_{ab}}(z-\mu)^{-1}f_a(z)f_b(z)(z-T)^{-1}dz\cdot w.\end{aligned}$$

由于

$$\int_{J_{ab}}(z-\mu)^{-1}f_a(z)f_b^*(z)(z-T)^{-1}dz$$

是与ε无关的有界线性算子，于是

$$\|Ax\|\geqslant 2\pi|f_a(\mu)f_b^*(\mu)|-c\cdot\varepsilon,\quad c\text{与}\varepsilon\text{无关}.$$

可见ε充分小时，$Ax\neq 0$. 往证$Ax\in X_T(F)$. 注意

$$\int_{J_{ab}}\frac{f_a(z)f_b^*(z)}{\lambda-z}(z-T)^{-1}x\,dz$$

是从J_{ab}之外部到X的解析函数，而且

$$(\lambda-T)\int_{J_{ab}}\frac{f_a(z)f_a^*(z)}{\lambda-z}(z-T)^{-1}x\,dz$$

$$=\int_{l_{ab}}\frac{f_a(z)f_b^*(z)}{\lambda-z}(\lambda-T)(z-T)^{-1}xdz$$

$$=\int_{l_{ab}}f_a(z)f_b^*(z)(z-T)^{-1}xdz$$

$$+\int_{l_{ab}}\frac{f_a(z)f_b^*(z)}{\lambda-z}xdz$$

$$=Ax.$$

所以,$\sigma_T(Ax)\subseteq J_{ab}\cup J_{ab}$之内部.但是$\sigma_T(Ax)\subseteq\sigma(T)\subseteq J$。于是$\sigma_T(Ax)\subseteq F$,亦即$Ax\in X_T(F)$.这说明$X_T(F)\neq\{0\}$.

定理 7.2 设T满足命题 7.2之条件,则T是强可分解算子。

证明 对T之每个谱极大空间Y,$\sigma(T|Y)\subseteq\sigma(T)\subseteq J$.不难看出,$T_Y\in\mathscr{B}(Y)$亦满足命题 7.2 诸条件,只须证明,满足这些条件的算子是可分解算子即可.由定理 7.1 及命题 7.2 只须证明,对J之任何闭子弧F,$\sigma(T^{X_T(F)})\subseteq\overline{J\setminus F}$.令

$$Y=X_T(F),\ \hat{X}=X/X_T(F),\hat{T}=T^{X_T(F)},$$

则

$$\sigma(T_Y)\cup\sigma(\hat{T})\subseteq\sigma(T)\subseteq J.$$

可见$\sigma(\hat{T})\subseteq J$,又

$$\|(z-\hat{T})^{-1}\|\leqslant\|(z-T)^{-1}\|,z\notin J.$$

由此可知,$\hat{T}$满足命题 7.2 的条件.令$N=\hat{X}_{\hat{T}}(F)$,π是从X到$\hat{X}$的自然映射,则$\pi^{-1}(N)\in\mathrm{Lat}T$,且

$$Y\subseteq\pi^{-1}(N).$$

于是Y是$T|\pi^{-1}(N)$的谱极大空间,从而

$$\sigma(T|\pi^{-1}(N))=\sigma(T_Y)\cup\sigma(\hat{T}|\hat{X}_{\hat{T}}(F))\subseteq F,$$

所以

$$\pi^{-1}(N)\subseteq X_T(F)=Y,\ \hat{X}_T(F)=N=\{0\}.$$

由命题 7.2,

$$\sigma(\hat{T})\cap F^{\circ}=\phi.$$

因此

$$\sigma(T^{X_T(F)}) = \sigma(\hat{T}) \subseteq \overline{J \setminus F}.$$

证毕.

注 记

可分解算子概念定义1.2是C.Foias[1]于1963年引入的。定义1.1的n-可分解算子概念是S.Plafker[1]于1970年引入的.重要的命题1.2是C.Foias[3]给出的,后经C.Albrecht[1]改进为目前这种形式.而其证明则是我们用初等方式建立的.定理1.1是采用C.Foias[1]证明方法,此定理的证明,I.Erdelyi与R.Lange[4]曾就谱可分解算子予以证明;但可惜是错误的.后来,C.Albrecht[1]给出新的正确证明.定理1.2是属于C.Foias[1]的,命题1.3是可分解算子的谱极大空间的表现定理;是由C.Foias[1]给出的.定理1.3是由C.Apostol[3]建立,它对商算子的研究十分重要.

定义2.1是我们引入的.目的在于指出分割性在可分解算子理论中的重要性.它刻划了(AC)算子与可分解算子的差异性在于性质(D).定义2.2的几乎局部化谱的概念是由F-H.Vasilescu[1]给出的,它是证明2-可分解算子(因而n-可分解算子)与可分解算子等价性定理2.1的关键.这个定理是可分解算子理论中一个十分重要结果,由M.Radjabalipour[1]及R.Lange[1]分别独立证明的.而另一刻划可分解算子本质的定理2.2是由A.A.Jafarian与F-H.Vasilescu[2]给出的.谱可分解算子的定义2.3是由I.Erdelyi与R.Lange[4]引入的.由定义2.3直到证明具有谱可分解性算子与可分解算子的等价性之定理2.4,这部分结果是E.Albrecht[1],R.Lange[2]与B.Nagy[1]分别独立证明的,本文采用的证明是孙善利给出的.

谱容度概念是谱算子的谱测度概念的推广,它是由C.Apostol[1]于1968年引入的.定理3.1属于C.Apostol[1],而命

题 3.1，命题 3.2 及定理 3.2 是属于C. Foias[3].

可分解算子运算性质的定理 4.1 是属于I. Colojoara与C. Foias[2]. 强可分解算子概念是C. Apostol[3]引入的. 定理4.2与定理 4.3 是属于C. Apostol[4]的. 这方面工作基本是C. Apostol于1968年所作.

可分解算子的对偶理论是可分解算子理论中的重要问题之一. 1971年, S. Frunza[2]首先证明命题 5.1，定理 5.1，后来I. Eraelyi与R. Lange[4]曾给出定理5.2的一个错误证明，我们与南京大学王声望[1]修正这一错误，建立完整的可分解算子的对偶理论. 定理 5.2，命题 5.3 及命题 5.4 是由我们给出的.

St. Frunza猜想这部分，叙述了1973年的St. Frunzǎ猜想与强可分解算子的关系，这是我们建立的(4).

关于可分解算子的充分性判据的命题 7.1 是M. Radjabalipour[2]建立的，当然定理 7.1亦属于M. Radjabalipour[2]，而命题 7.2 与定理 7.2 则属于A. A. Jafarian[2].

第四章　性　质（ABC）

§1　预　备　知　识

1．Bool代数

令 S 是部分序集，若对任意 $x,y\in S$，存在最小上界 $x\vee y$ 及最大下界 $x\wedge y$，则称 S 是格(lattice)．格 S 称为 Bool代数，若

(i)　S 有元 0 及 1，使 $x\leqslant 1$，$x\geqslant 0$，对一切 $x\in S$；

(ii)　S 是分配的，即

$$x\wedge(y\vee z)=(x\wedge y)\vee(x\wedge z),\ \forall x,y,z\in S;$$

(iii)　对任意 $x\in S$，有补元 $x'\in S$；使

$$x\vee x'=1,\ x\wedge x'=0.$$

不难验证，若 S 是 Bool 代数，则可在 S 中引入加法与乘法：

$$x+y=(x\wedge y')\vee(x'\wedge y),\ x\cdot y=x\wedge y.$$

使 S 成为有单位元 1 的 Bool 环；反之，若 S 是有单位元 1 的 Bool 环，则可在 S 中引入序：

$$x\leqslant y,\ 若\ x=x\cdot y.$$

而且，令 $x'=1+x$，

$$x\vee y=x+y+x\cdot y,\ x\wedge y=x\cdot y,\ x,y\in S.$$

于是 S 成为 Bool 代数．

重要的一类 Bool 代数是给定的平面点集 S 的一切子集类 Σ 做成的 Bool 代数，其中序按通常包含关系确定．对于 E，$F\in\Sigma$，

$$E\vee F=E\cup F,\ E\wedge F=E\cap F,$$

空集与集 S 做为0与1．此 Bool 代数通常记为 (S,Σ)．

Bool 代数 (S,Σ) 称为 σ-Bool 代数，若对任何可数多个 $\{E_i\}_{i=1}^{\infty}\subseteq\Sigma$，有 $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}E_i\in\Sigma$．

2．函数代数 $S(S,\Sigma)$

令 S 是 $\mathbb{C}$ 中的集合，Σ 是 S 的子集类，χ_σ 表示集 $\sigma\in\Sigma$ 的示性函数，设

$$\mathscr{M}=\left\{f\mid f=\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\chi_{\sigma_k},\ \alpha_k\in\mathbb{C},\ \sigma_k\in\Sigma\right\}.$$

不难看出 $\mathscr{M}$ 是 $\mathbb{C}$ 上线性空间．对于 $f\in\mathscr{M}$，我们定义

$$\|f\|_\infty=\sup_{s\in S}|f(s)|<+\infty.$$

令 $B(S,\Sigma)$ 表示 $\mathscr{M}$ 在范数 $\|\cdot\|_\infty$ 下的完备化空间．它是 Banach 空间，因此 $B(S,\Sigma)$ 是函数代数．

函数 f 称为 **Σ 可测的**，若对任何 f 值域中的 Borel 子集 σ，皆有 $f^{-1}(\sigma)\in\Sigma$．特别，若 Σ 是由 S 的一切 Borel 子集构成时，则 Σ 可测函数 f 又称为**Borel 可测函数**．

命题 1.1 $B(S,\Sigma)$ 是一切有界 Σ 可测函数在范数 $\|\cdot\|_\infty$ 下构成的 Banach 空间．

证明 令 $f\in B(S,\Sigma)$．先证明 f 是 Σ 可测的．设 σ 是 f 值域中 Borel 子集，往证 $f^{-1}(\sigma)\in\Sigma$．注意

$$f^{-1}\left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda}\sigma_\lambda\right)=\bigcup_{\lambda\in\Lambda}f^{-1}(\sigma_\lambda),\ f^{-1}\left(\bigcap_{\lambda\in\Lambda}\sigma_\lambda\right)=\bigcap_{\lambda\in\Lambda}f^{-1}(\sigma_\lambda).$$

又由平面 Borel 集结构，不妨设 σ 是开集．令

$$\sigma_n=\left\{f(s)\ \Big|\ O\left(f(s),\frac{1}{n}\right)\subseteq\sigma\right\}\quad(n=1,2,\cdots),$$

其中 $O\left(f(s),\frac{1}{n}\right)$ 表示以 $f(s)$ 为心，$\frac{1}{n}$ 为半径的开球．

于是

$$f^{-1}(\sigma)=\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcup_{m=1}^{\infty}\bigcap_{k=m}^{\infty}f_k^{-1}(\sigma_n),$$

其中 f_k 表示在范数 $\|\cdot\|_\infty$ 下收敛于 f 的$\mathscr{M}$中函数列。注意$f_k^{-1}(\sigma_n)\in\Sigma$，故 $f^{-1}(\sigma)\in\Sigma$，即 f 是Σ可测函数。此外

$$\|f_k\|_\infty<+\infty\quad(k=1,2,\cdots),$$

存在自然数N，使得 $n\geqslant N$ 时，$\|f-f_n\|_\infty\leqslant 1$，则

$$\|f\|_\infty\leqslant\|f-f_N\|_\infty+\|f_N\|_\infty\leqslant 1+M_N,$$

M_N 为常数。因此 f 是有界的。

反过来，令 f 是有界的Σ可测函数，f 是实值函数。不失一般性可设 $f\geqslant 0$，又令

$$\sigma_{n,k}=\left\{s\mid s\in S,\frac{k}{2^n}\leqslant f(s)\leqslant\frac{k+1}{2^n}\right\}\quad(k=0,1,2,\cdots,n2^n-1).$$

$$\sigma_{n,n2^n}=\{s\mid s\in S,\ f(s)\geqslant n\}.$$

由于 f 是Σ可测的，故 $\sigma_{n,k}\in\Sigma$，而且

$$S=\bigcup_{k=0}^{n2^n}\sigma_{n,k}\quad(n=1,2,\cdots).$$

我们定义$\mathscr{M}$中简单函数，

$$f_n(s)=\frac{k}{2^n},\ s\in\sigma_{n,k}\,(k=0,1,\cdots n2^n).$$

这样 $f_n(s)\leqslant f_{n+1}(s)$，因此只须证明 f_n 在范数 $\|\cdot\|_\infty$ 之下收敛于 f。又 f 在 S 上有界，因此，存在自数数N，使得当$n\geqslant N$时，

$$|f_n(s)-f(s)|\leqslant\frac{1}{2^n},\ s\in S.$$

于是

$$\|f-f_n\|_\infty=\sup_{s\in S}|f(s)-f_n(s)|\to 0\quad(n\to\infty),$$

因此，$f\in B(S,\Sigma)$。当 f 是复值函数时亦可类似证明。

3. 谱测度

令Σ表示$\mathbb{C}$的集合 S 的子集构成的 Bool 代数，$\mathscr{P}$表示 X

上有界射影算子构成的 Bool 代数。

定义 1.1 我们称同态写像 $E(\cdot):\Sigma\to\mathscr{P}$ 为 Σ 类测度，若

(i) $E(S)=I$，$E(\phi)=0$，

(ii) $E(\cdot)$ 是有限可加的。

我们称 Σ 类测度为 $(\Sigma,\ \Gamma)$ 类谱测度，若它还满足条件：

(iii) 对于 X^* 中完整集 Γ，当 $x\in X$，$x^*\in\Gamma$ 时，数值测度函数 $x^*E(\cdot)x$ 是可数可加的。

特别，有 $\Gamma=X^*$ 时，称 $E(\cdot)$ 为 Σ 类谱测度；又还有 $\Sigma=\mathscr{B}$ 时，则称它为谱测度(Spectral measure)。

定义 1.2 (Σ,Γ) 类谱测度 $E(\cdot)$ 称为 $T\in\mathscr{B}(X)$ 的 (Σ,Γ) 类单位分解(resolution of the identity)，若

(iv) $E(\sigma)T=TE(\sigma)$，$\sigma\in\Sigma$，

(v) $\sigma(T|E(\sigma)X\subseteq\overline{\sigma})$，$\sigma\in\Sigma$。

特别，又有 $\Gamma=X^*$ 时，称为 Σ 类单位分解， 又进而再有 $\Sigma=\mathscr{B}$ 时，称为单位分解。

4. 本性有界的 Σ 可测数函空间 $EB(S,\Sigma)$

集 S 上函数 f 称为 E 本性有界的，若对 Σ 类谱测度 $E(\cdot)$ 有

$$E\text{-ess}\sup_{s\in S}|f(s)|=\inf_{E(\delta)=I}\ \sup_{s\in\delta}|f(s)|<+\infty.$$

由于 $E(\cdot)$ 可数可加，故存在 $\delta_0\in\Sigma$，使得 $E(\delta_0)=I$，而且

$$E\text{-ess}\sup_{s\in S}|f(s)|=\sup_{s\in\delta_0}|f(s)|.$$

这样就存在 δ_0 上有界函数 f_0，使得 $f_0(s)=f(s)$，$s\in\delta_0$ 成立，即 f_0 与 f 是 E-几乎处处相等的，因此 f 是 E-几乎处处有界的。此外 f 又是 Σ 可测的。我们用 $EB(S,\Sigma)$ 表示 S 上 E-本性有界的 Σ 可测函数全体，在范数

$$\|f\|_E=E\text{-ess}\sup_{s\in S}|f(s)|<+\infty$$

下构成的 Banach 空间。当然它也是函数代数。

5. $B(S,\Sigma)$中函数关于Σ类谱测度$E(\cdot)$之积分

令Σ表示 S 子集类做成的 σ- Bool 代数， $E(\cdot)$ 是Σ类谱测度。

命题 1.2 设Σ是 σ-Bool 代数，则Σ类测度是Σ类谱测度当且仅当 $E(\cdot)$是有界的。

证明 令 $E(\cdot)$ 是Σ类谱测度。若 $E(\cdot)$ 是无界的，则存在 $x\in X$，$x^*\in X^*$，使得数值测度函数 $x^*E(\cdot)x$ 是无界的，我们不妨令$\mathrm{Re}\,x^*E(\cdot)x$是无界的，因此存在渐升集列$\{\sigma_n\}_{n=1}^{\infty}\subseteq\Sigma$，使得

$$\lim_{n\to\infty}\mathrm{Re}\,x^*E(\sigma_n)x=+\infty.$$

由于Σ是 σ-Bool 代数，所以集合$\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\sigma_n\in\Sigma$， 因此

$$\left|\mathrm{Re}\,x^*E\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\sigma_n\right)x\right|<+\infty.$$

又 $E(\cdot)$是Σ谱测度，所以等式

$$\mathrm{Re}\,x^*E\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\sigma_n\right)x=\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{Re}\,x^*E(\sigma_n)x$$

成立。但是

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{Re}\,x^*E\ (\sigma_n)x&=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\mathrm{Re}\,x^*E(\sigma_i)x\\&=\lim_{n\to\infty}\mathrm{Re}\,x^*E\left(\bigcup_{i=1}^{n}\sigma_i\right)x\\&=\lim_{n\to\infty}\mathrm{Re}\,x^*E(\sigma_n)x,\end{aligned}$$

于是

$$\mathrm{Re}\,x^*E\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\sigma_n\right)x=\lim_{n\to\infty}\mathrm{Re}\,x^*E(\sigma_n)x=+\infty.$$

矛盾。所以$E(\cdot)$是有界的。

反之，令 $E(\cdot)$ 是有界的Σ类测度，

$$\|E(\sigma)\|\leqslant K,\ \sigma\in\Sigma.$$

令$\{\sigma_n\}_{n=1}^{\infty}\subseteq\Sigma$是互不相交集列，对一切$x\in X$，$x^*\in X^*$，我们有

$$\begin{aligned}\left|x^*\left[\sum_{n=1}^{m}E(\sigma_n)\right]x\right|&=\left|\sum_{n=1}^{m}x^*E(\sigma_n)x\right|\\&\leqslant\sum_{n=1}^{m}\{|\mathrm{Re}\ x^*E(\sigma_n)x|+|\mathrm{Im}x^*E(\sigma_n)x|\}\\&=|\textstyle\sum_R^+\mathrm{Re}\,x^*E(\sigma_n)x-\sum_R^-\mathrm{Re}\ x^*E(\sigma_n)x|\\&\quad+|\textstyle\sum_I^+\mathrm{Im}x^*E(\sigma_n)x-\sum_I^-\mathrm{Im}x^*E(\sigma_n)x|\\&=|\mathrm{Re}\,x^*E(\cup_R^+\sigma_n)x-\mathrm{Re}\,x^*E(\cup_R^-\sigma_n)x|\\&\quad+|\mathrm{Im}x^*E(\cup_I^+\sigma_n)x-\mathrm{Im}x^*E(\cup_I^-\sigma_n)x|\\&\leqslant4K\|x\|\|x^*\|.\end{aligned}$$

于是

$$\left|x^*E\left(\bigcup_{n=1}^{m}\sigma_n\right)x\right|\leqslant4K\|x\|\|x^*\|,\ x\in X,\ x^*\in X^*.$$

因此$E(\cdot)x$是弱可数可加的，据Orliz-Pettis定理可知，$E(\cdot)$是强可数可加的，所以 $E(\cdot)$是Σ类谱测度。

现在来定义 $B(S,\Sigma)$ 与 $EB(S,\Sigma)$ 中的函数关于Σ类谱测度的积分。令$E(\cdot)$是Σ类谱测度，f 是有界的阶层函数，

$$f(s)=\sum_{k=1}^{m}\alpha_k\chi_{\delta_k}(s),\ \delta_k\in\Sigma\quad(k=1,\cdots,n).$$

我们规定 f 关于 $E(\cdot)$的积分是

$$\int_S f(s)E(ds)=\sum_{k=1}^{n}\alpha_kE(\delta_k).$$

先验证定义的合理性。令

$$f=\sum_{j=1}^{m}\alpha_j\chi_{\delta_j},\qquad g=\sum_{k=1}^{n}\beta_k\chi_{\sigma_k},$$

$$\delta_j\sigma_k\in\Sigma(j=1,\cdots,m;\ k=1,\cdots,n),$$

而且$f=g$.注意

$$0=f-g=\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}(\alpha_j-\beta_k)\chi_{\delta_j\cap\sigma_k}.$$

因此若$\delta_j\cap\sigma_k\neq\phi$，必有$\alpha_j-\beta_k=0$，于是

$$\sum_{j=1}^{m}\alpha_jE(\delta_j)-\sum_{k=1}^{n}\beta_kE(\sigma_k)$$

$$=\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}(\alpha_j-\beta_k)E(\delta_j\cap\sigma_k)=0。$$

这说明$\int_s f(s)E(ds)=\int_s g(s)E(ds)$.

又对任意$x\in X$，$x^*\in X^*$有下述估计

$$|x^*\int_s f(s)E(ds)x|$$

$$=\left|x^*\left[\sum_{j=1}^{n}\alpha_jE(\delta_j)\right]x\right|$$

$$=\left|\sum_{j=1}^{n}\alpha_jx^*E(\delta_j)x\right|$$

$$\leqslant\max_{1\leqslant j\leqslant n}|\alpha_j|\cdot\sum_{j=1}^{n}|x^*E(\delta_j)x|$$

$$\leqslant\|f\|_\infty\left\{\sum_{j=1}^{n}\left[|\mathrm{Re}\,x^*E(\delta_j)x|+|\mathrm{Im}x^*E(\delta_j)x|\right]\right\}$$

$$=\|f\|_\infty\{|\textstyle\sum_R^+\mathrm{Re}x^*E(\delta_j)x-\sum_R^-\mathrm{Re}x^*E(\delta_j)x|$$
$$+|\textstyle\sum_I^+\mathrm{Im}x^*E(\delta_j)x-\sum_I^-\mathrm{Im}x^*E(\delta_j)x|\}$$
$$=\|f\|_\infty\{|\mathrm{Re}x^*E(\cup_R^+\delta_j)x-\mathrm{Re}x^*E(\cup_R^-\delta_j)x|$$
$$+|\mathrm{Im}x^*E(\cup_I^+\delta_j)x-\mathrm{Im}x^*E(\cup_I^-\delta_j)x|\}$$
$$\leqslant4K\|f\|_\infty\|x\|\|x^*\|,$$

其中$f\in B(S,\Sigma)$是简单函数.

对任意$f\in B(S,\Sigma)$，存在$B(S,\Sigma)$中简单函数列f_n按$\|\cdot\|_\infty$收敛到f．下面我们证明$\int_s f_n(s)E(ds)$收敛于一个仅与f有关不依赖于$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$的选取的值.

前面已证明对简单函数$f\in B(S,\Sigma)$，

$$\left\|\int_S f(s)E(ds)\right\| \leqslant 4K\|f\|_\infty,$$

因此

$$\left\|\int_S f_n(s)E(ds) - \int_S f_m(s)E(ds)\right\|$$
$$= \left\|\int_S [f_n(s) - f_m(s)]E(ds)\right\| \leqslant 4K\|f_n - f_m\|_\infty.$$

由此可见 $\int_S f_n(s) E(ds)$ 是 $\mathscr{B}(X)$ 中的Cauchy 列，故收敛于 $\mathscr{B}(X)$ 中一个元。又另一序列 $\{g_n\}_{n=1}^\infty$ 亦在 $\|\cdot\|_\infty$ 下收敛于 f，故

$$\left\|\int_S g_m(s)E(ds) - \int_S f_n(s)E(ds)\right\|$$
$$\leqslant 4K\|f_n - g_m\|_\infty$$
$$\leqslant 4K\{\|f_n - f\|_\infty + \|f - g_m\|_\infty\},$$

所以在 $\mathscr{B}(X)$ 中 $\int_S f_n(s)E(ds)$ 与 $\int_S g_m(s)E(ds)$ 的极限相同。我们可定义

$$\int_S f(s)E(ds) = \lim_{n\to\infty}\int_S f_n(s)E(ds).$$

这样就对 $B(S,\Sigma)$ 的中函数 f，引入关于 Σ 类谱测度 $E(\cdot)$ 之积分。

由此我们亦可建立 $EB(S,\Sigma)$ 中函的数 f 关于 $E(\cdot)$ 之积分。由定义不难看出，对任意 $\sigma\in\Sigma$，

$$\int_\sigma f(s)E(ds) = \int_S f(s)\chi_\sigma(s)E(ds) = \int_S f(s)E(ds\cap\sigma).$$

若 $E(\delta) = I$，则对 $f\in B(S;\Sigma)$ 有

$$\int_\delta f(s)E(ds) = \int_S f(s)E(ds).$$

这样对 $g\in EB(S,\Sigma)$，可选取 $f\in B(S,\Sigma)$，使得 $f = g$，E-几乎处处成立，因此可定义

$$\int_S g(s)E(ds) = \int_S f(s)E(ds).$$

不难验证它不依赖于 f 的选取。

综合前述，建立了

$$B(S,\Sigma)\ni f \mapsto \int_S f(s)E(ds)\in\mathscr{B}(X)$$

之由函数代数 $B(S,\Sigma)$ 到算子代数 $\mathscr{B}(X)$ 内的连续同态写像。

容易看出

$$\int_S (t)\int_S f(s)E(ds\cap dt)=\int_S f(s)g(s)E(ds),$$
$$\int_S f(s)E(h^{-1}(ds))=\int_S f(h(s))E(ds),$$
其中 h 是 S 内映像，且对任何 $\delta\in\Sigma$，$h^{-1}(\delta)\in\Sigma$.

§2 射影算子的 Bool 代数

定义 2.1 $T\in\mathscr{B}(X)$ 称为有性质 (B_σ)，若 T 有性质 (A)，且对 $\mathbb{C}$ 之子集 σ，若 $x\in X_T(\sigma)$，$y\in X_T(\sigma^c)$，则存在仅与 σ 有关的常数 K_σ，使得

$$\|x\|\leqslant K_\sigma\|x+y\|.$$

定义 2.2 设 T 有性质 (A)，令集类

$$\Sigma_1=\{\sigma\,|\,\sigma\subseteq\mathbb{C},\ X=\overline{X_T(\sigma)+X_T(\sigma^c)}\}.$$

显然 Σ_1 在取余集运算下封闭，而且 ϕ，$\mathbb{C}\in\Sigma_1$.

命题 2.1 设 $T\in\mathscr{B}(X)$ 有性质 (A) 与 (B_σ)，$\sigma\in\Sigma_1$，则存在有界射影算子 P_σ，使得，

(i) 当 $x\in\overline{X_T(\sigma)}$，$P_\sigma x=x$，当 $y\in\overline{X_T(\sigma^c)}$，$P_\sigma y=0$；

(ii) $\|P_\sigma\|\leqslant K_\sigma$；

(iii) $P_\sigma\vee P_{\sigma^c}=I$，$P_\sigma\wedge P_{\sigma^c}=0$.

证明 因为 $\sigma\in\Sigma_1$，故

$$X=\overline{X_T(\sigma)+X_T(\sigma^c)}.$$

在 X 的稠子集 $D(\sigma)=X_T(\sigma)+X_T(\sigma^c)$ 上定义幂等算子 P_σ：

$$P_\sigma x=x,\ 当\ x\in X_T(\sigma);\quad P_\sigma y=0,\ 当\ y\in X_T(\sigma^c).$$

并且令 $P_{\sigma^c}=I-P_\sigma$. 事实上

$$(I-P_\sigma)x=x-P_\sigma x=0,\ 当\ x\in X_T(\sigma),$$
$$(I-P_\sigma)y=y-P_\sigma y=y,\ 当\ y\in X_T(\sigma^c).$$

故从 $\sigma^c\in\Sigma_1$，亦见上述 $P_{\sigma^c}=I-P_\sigma$ 是合理的. 由于 $\overline{D(\sigma)}=X$，且满足 (B_σ) 性质，因此对 $x\in X_T(\sigma)$，$y\in X_T(\sigma^c)$ 有

$$\|P_\sigma(x+y)\|=\|x\|\leqslant K_\sigma\|x+y\|.$$

这样 P_σ 是稠定义的有界幂等算子，故 P_σ 可以扩张为 X 上的

有界幂等算子，仍记此射影算子为 P_σ. $\sigma\in\Sigma_1$.

对任意的 $z\in X$，有 $x_n\in X_T(\sigma)$，$y_n\in X_T(\sigma^c)$，使

$$z=\lim_{n\to\infty}(x_n+y_n).$$

令 $z_n=x_n+y_n$，由性质(B_σ)，

$$\|x_m-x_n\|\leqslant K_\sigma\|z_m-z_n\| \qquad (m,n=1,2,\cdots).$$

由此可见序列 $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ 是收敛的。令

$$x=\lim_{n\to\infty}x_n.$$

从而 $y_n=z_n-x_n$ 亦是收敛序列。令

$$y=\lim_{n\to\infty}y_n,$$

因此

$$x=\overline{X_T(\sigma)},\quad y\in\overline{X_T(\sigma^c)},\quad z=x+y.$$

由于

$$P_\sigma z=\lim_{n\to\infty}P_\sigma(x_n+y_n)=\lim_{n\to\infty}x_n=x,$$

$$P_{\sigma^c} z=\lim_{n\to\infty}P_{\sigma^c}(x_n+y_n)=\lim_{n\to\infty}y_n=y,$$

这样，$P_\sigma z\in\overline{X_T(\sigma)}$，$P_{\sigma^c} z\in\overline{X_T(\sigma^c)}$。我们就有

$$P_\sigma X=\overline{X_T(\sigma)},\quad P_{\sigma^c}X=\overline{X_T(\sigma^c)},\quad \sigma\in\Sigma_1.$$

这就证明了(i)与(iii)。

注意，对 $z\in D(\sigma)$，有

$$\|P_\sigma z\|=\|x\|\leqslant K_\sigma\|x+y\|=K_\sigma\|z\|,$$

由范数连续性，可知对一切 $z\in X$，

$$\|P_\sigma z\|\leqslant K_\sigma\|z\|,\quad \sigma\in\Sigma_1,$$

因此

$$\|P_\sigma\|\leqslant K_\sigma,\quad \sigma\in\Sigma_1.$$

由此可见，若 T 有性质 (A) 与(B_σ)，则对 $\sigma\in\Sigma_1$ 有 $X=\overline{X_T(\sigma)}\oplus\overline{X_T(\sigma^c)}$ 成立。

命题 2.2 设$T\in\mathscr{B}(X)$有性质(A)与(B_σ)，又 $A\in\mathscr{B}(X)$ 且 $AT=TA$，则 $AP_\sigma=P_\sigma A$，$\sigma\in\Sigma_1$。

证明 因为 $\sigma\in\Sigma_1$，故

$$X=\overline{X_T(\sigma)+X_T(\sigma^c)}.$$

令 $z\in X_T(\sigma)+X_T(\sigma^c)$，则 $z=x+y$，$x\in X_T(\sigma)$，$z\in X_T(\sigma^c)$，于是 $Az=Ax+Ay$。又 $AT=TA$，所以由第一章定理 2.1，

$$\sigma_T(Ax)\subseteq\sigma_T(x)\subseteq\sigma,\ \sigma_T(Ay)\subseteq\sigma_T(y)\subseteq\sigma^c.$$

于是 $Ax\in X_T(\sigma)$，$Ay\in X_T(\sigma^c)$。由命题 2.1，$P_\sigma Ax=Ax$，$P_\sigma Ay=0$，所以

$$P_\sigma Az=P_\sigma Ax+P_\sigma Ay=Ax=AP_\sigma z.$$

又 $X_T(\sigma)+X_T(\sigma^c)$ 在 X 中稠密，因此，

$$P_\sigma A=AP_\sigma,\ \sigma\in\Sigma_1.$$

下面引入 Σ_1 之子类。

定义 2.3 设 $T\in\mathscr{B}(X)$ 有性质 (A)，令

$$\Sigma_2=\{\sigma\mid\sigma\in\Sigma_1,\ \overline{X_T(\sigma_T(x))}=\overline{X_T(\sigma_T(x)\cap\sigma)+X_T(\sigma_T(x)\cap\sigma^c)},\ x\in X\}.$$

显然 Σ_2 在取余集运算下是封闭的，而且 ϕ，$\mathbb{C}\in\Sigma_2$。

命题 2.3 设 $T\in\mathscr{B}(X)$ 有性质 (A)，则 Σ_2 是 Bool 代数。

证明 由于 Σ_2 在取余集下是封闭的，因此只须证明，若 σ_1，$\sigma_2\in\Sigma_2$，则 $\sigma_1\cup\sigma_2\in\Sigma_2$，注意从 $\sigma_1\in\Sigma_2$，有

$$\overline{X_T(\sigma_T(x))}=\overline{X_T(\sigma_T(x)\cap\sigma_1)+X_T(\sigma_T(x)\cap\sigma_1^c)},\ x\in X.$$

因此，若 $y\in X_T(\sigma_T(x)\cap\sigma_1^c)$，则

$$\sigma_T(y)\subseteq\sigma_T(x)\cap\sigma_1^c.$$

又 $\sigma_2\in\Sigma_2$，所以

$$\overline{X_T(\sigma_T(y))}=\overline{X_T(\sigma_T(y)\cap\sigma_2)+X_T(\sigma_T(y)\cap\sigma_2^c)}.$$

因此

$$X_T(\sigma_T(y)\cap\sigma_2)\subseteq X_T(\sigma_T(x)\cap\sigma_1^c\cap\sigma_2),$$

$$X_T(\sigma_T(y)\cap\sigma_2^c)\subseteq X_T(\sigma_T(x)\cap\sigma_1^c\cap\sigma_2^c).$$

这样，

$$X_T(\sigma_T(y))\subseteq\overline{X_T(\sigma_T(x)\cap\sigma_1^c\cap\sigma_2)+X_T(\sigma_T(x)\cap\sigma_1^c\cap\sigma_2^c)}.$$

从而

$$\overline{X_T(\sigma_T(x)\cap\sigma_1^c}$$

$$\subseteq \overline{X_T(\sigma_T(x) \cap \sigma_1^c \cap \sigma_2) + X_T(\sigma_T(x) \cap \sigma_1^c \cap \sigma_2^c)}.$$

另一方面，若 $y \in X_T(\sigma_T(x) \cap \sigma_1^c \cap \sigma_2) + X_T(\sigma_T(x) \cap \sigma_1^c \cap \sigma_2^c)$；则 $y = u + v$，其中

$$u \in X_T(\sigma_T(x) \cap \sigma_1^c \cap \sigma_2), \quad v \in X_T(\sigma_T(x) \cap \sigma_1^c \cap \sigma_2^c),$$

由第一章定理 2.1，

$$\begin{aligned}\sigma_T(y) &\subseteq \sigma_T(u) \cup \sigma_T(v) \\ &\subseteq (\sigma_T(x) \cap \sigma_1^c \cap \sigma_2) \cup (\sigma_T(x) \cap \sigma_1^c \cap \sigma_2^c) \\ &\subseteq \sigma_T(x) \cap \sigma_1^c,\end{aligned}$$

故 $y \in X_T \sigma_T(x) \cap \sigma_1^c)$。这样，

$$\overline{X_T(\sigma_T(x) \cap \sigma_1^c \cap \sigma_2) + X_T(\sigma_T(x) \cap \sigma_1^c \cap \sigma_2^c)} \subseteq \overline{X_T(\sigma_T(x) \cap \sigma_1^c)},$$

我们有

$$\begin{aligned}&\overline{X_T(\sigma_T(x) \cap \sigma_1^c)} \\ &= \overline{X_T(\sigma_T(x) \cap \sigma_1^c \cap \sigma_2) + X_T(\sigma_T(x) \cap \sigma_1^c \cap \sigma_2^c)}.\end{aligned}$$

由此

$$\begin{aligned}&\overline{X_T(\sigma_T(x))} \\ &= \overline{X_T(\sigma_T(x) \cap \sigma_1) + X_T(\sigma_T(x) \cap \sigma_1^c)} \\ &= \overline{X_T(\sigma_T(x) \cap \sigma_1) + X_T(\sigma_T(x) \cap \sigma_1^c \cap \sigma_2) + X_T(\sigma_T(x) \cap \sigma_1^c \cap \sigma_2^c)}.\end{aligned}$$

若

$$y \in X_T(\sigma_T(x) \cap \sigma_1) + X_T(\sigma_T(x) \cap \sigma_1^c \cap \sigma_2),$$

则

$$y = u + v, \quad u \in X_T(\sigma_T(x) \cap \sigma_1), \quad v \in X_T(\sigma_T(x) \cap \sigma_1^c \cap \sigma_2).$$

所以

$$\begin{aligned}\sigma_T(y) &\subseteq \sigma_T(u) \cup \sigma_T(v) \\ &\subseteq (\sigma_T(x) \cap \sigma_1) \cup (\sigma_T(x) \cap \sigma_1^c \cap \sigma_2) \\ &\subseteq (\sigma_T(x) \cap \sigma_1) \cup (\sigma_T(x) \cap \sigma_2) \\ &\subseteq \sigma_T(x) \cap (\sigma_1 \cup \sigma_2).\end{aligned}$$

因此

$$y \in X_T(\sigma_T(x) \cap (\sigma_1 \cup \sigma_2)).$$

这样

$$\overline{X_T(\sigma_T(x))}$$

$$= \overline{X_T(\sigma_T(x) \cap (\sigma_1 \cup \sigma_2)) + X_T(\sigma_T(x) \cap (\sigma_1 \cup \sigma_2)^c)}.$$

由Σ_2之定义 2.3，

$$\sigma_1 \cup \sigma_2 \in \Sigma_2.$$

命题 2.4 设$T \in \mathscr{B}(X)$有性质(A)与(B_σ)，$\sigma \in \Sigma_2$，则存在射影算子$\{P_\sigma\}_{\sigma \in \Sigma_2}$，使得

(i) $\{P_\sigma\}_{\sigma \in \Sigma_2}$是射影算子 Bool 代数；

(ii) $P_\sigma T = TP_\sigma$，$\sigma \in \Sigma_2$.

证明 由于，$\Sigma_2 \subseteq \Sigma_1$，由命题 2.1，存在射影算子$P_\sigma$，使得

$$P_\sigma X = \overline{X_T(\sigma)},\quad P_{\sigma^c} X = \overline{X_T(\sigma^c)},$$

而且

$$X = \overline{X_T(\sigma)} \oplus \overline{X_T(\sigma^c)}.$$

注意 $\overline{X_T(\sigma)}$，$\overline{X_T(\sigma^c)}$ 是T的超不变子空间，对任意$z \in X$，有

$$z = x + y,\quad x \in \overline{X_T(\sigma)},\quad y \in \overline{X_T(\sigma^c)},$$

而且

$$P_\sigma Tz = P_\sigma Tx + P_\sigma Ty = P_\sigma Tx = Tx = TP_\sigma z.$$

因此

$$P_\sigma T = TP_\sigma,\quad \sigma \in \Sigma_2.$$

类似可证明

$$P_\sigma P_\delta = P_\delta P_\sigma,\quad \sigma, \delta \in \Sigma_2.$$

下面我们定义$\{P_\sigma\}_{\sigma \in \Sigma_2}$中的运算：

$$P_\sigma \vee P_\delta = P_\sigma + P_\delta - P_\sigma \cdot P_\delta,\quad P_\sigma \wedge P_\delta = P_\sigma \cdot P_\delta, \sigma, \delta \in \Sigma_2.$$

此外，理解$\{P_\sigma\}_{\sigma \in \Sigma_2}$中序$P_\sigma \leqslant P_\delta$，若$P_\sigma X \subseteq P_\delta X$. 于是$\{P_\sigma\}_{\sigma \in \Sigma_2}$构成格. 又

$$P_\phi X = \overline{X_T(\phi)} = \{0\},\quad P_{\mathbb{C}} X = \overline{X_T(\mathbb{C})} = X,$$

因此 $P_\phi=0$，$P_{\mathbb{C}}=I$.

对于$\sigma\in\Sigma_2$，类似命题 2.1 可证明

$$x\in\overline{X_T(\sigma_T(x))}=\overline{X_T(\sigma_T(x)\cap\sigma)}\oplus\overline{X_T(\sigma_T(x)\cap\sigma^c)},$$

因此

$$x=y+z,\quad y\in\overline{X_T(\sigma_T(x)\cap\sigma)},\quad z\in\overline{X_T(\sigma_T(x)\cap\sigma^c)}.$$

所以

$$P_\sigma x=y\in\overline{X_T(\sigma_T(x)\cap\sigma)},\quad P_{\sigma^c}x=z\in\overline{X_T(\sigma_T(x)\cap\sigma^c)}.$$

这样对 $\sigma,\delta\in\Sigma_2$，有

$$P_\sigma\cdot P_\delta x\in\overline{X_T(\sigma_T(x)\cap\sigma\cap\delta)}.$$

事实上，因为 $P_\delta x\in\overline{X_T(\sigma_T(x)\cap\delta)}$，存在 $x_n\in X_T(\sigma_T(x)\cap\delta)$，且 $P_\delta x=\lim\limits_{n\to\infty}x_n$，从而

$$P_\sigma.P_\delta x=\lim_{n\to\infty}P_\sigma x_n.$$

因为$\sigma\in\Sigma_2$，所以

$$x_n\in\overline{X_T(\sigma_T(x_n))}=\overline{X_T(\sigma_T(x_n)\cap\sigma)}\oplus\overline{X_T(\sigma_T(x_n)\cap\sigma^c)}$$

$$P_\sigma x_n\in\overline{X_T(\sigma_T(x_n)\cap\sigma)}\subseteq\overline{X_T(\sigma_T(x)\cap\delta\cap\sigma)}.$$

故有

$$P_\sigma P_\delta\ x\in\overline{X_T(\sigma_T(x)\cap\delta\cap\sigma)}.$$

又由命题 2.3，Σ_2是 Bool 代数，故 $\sigma\cap\delta\in\Sigma_2$. 因此

$$P_{\sigma\cap\delta}\cdot P_\sigma\cdot P_\delta x=P_\sigma\cdot P_\delta x,\quad x\in X.$$

而它们皆可交换，所以

$$P_\sigma\cdot P_\delta\cdot P_{\sigma\cap\delta}=P_{\sigma\cap\delta}.P_\sigma.P_\delta=P_\sigma P_\delta,$$

从而

$$P_\sigma P_\delta(P_\sigma P_\delta-P_{\sigma\cap\delta})=0.$$

这样

$$P_\sigma P_\delta=P_{\sigma\cap\delta},$$

即 $P_\sigma\wedge P_\delta=P_{\sigma\cap\delta}$，$\sigma,\delta\in\Sigma_2$. 进而，对于$\sigma,\delta\in\Sigma_2$

$$\begin{aligned}P_\sigma\wedge P_\delta&=P_\sigma+P_\delta-P_\sigma P_\delta=P_\sigma+P_\delta-P_{\sigma\cap\delta}\\&=I-(I-P_\sigma)(I-P_\delta)=I-P_{\sigma^c}P_{\delta^c}\end{aligned}$$

$$=I-P_{\sigma^c\cap\delta^c}=I-P_{(\sigma\cup\delta)^c}=P_{\sigma\cup\delta}.$$

于是建立了对应：

$$P_\sigma\vee P_\delta=P_{\sigma\cup\delta},\quad P_\sigma\wedge P_\delta=P_{\sigma\cap\delta}.$$

Σ_2是 Bool 代数，故 $\{P_\sigma\}_{\sigma\in\Sigma_2}$ 构成 Bool 代数.

命题2.5 设 $T\in\mathscr{B}(X)$是(AC)算子，则$\overline{X_T(\sigma)}$是$T|X_T(\bar{\sigma})$的超不变子空间，其中$\sigma\subseteq\mathbb{C}$.

证明 显然 $\overline{X_T(\sigma)}\subseteq X_T(\bar{\sigma})$. 由第二章定理 2.2，$X_T(\bar{\sigma})$是 T 的谱极大空间. 令

$$Y=X_T(\bar{\sigma}),\quad Z=\overline{X_T(\sigma)},\quad A\in\mathscr{B}(Y),$$

而且

$$A(T|X_T(\sigma))=(T|X_T(\bar{\sigma}))A.$$

令$x\in Z$，有 $x_n\in X_T(\sigma)$，使得 $x=\lim\limits_{n\to\infty}x_n$，$x_n\in\overline{X_T(\sigma)}\subseteq Y$. 又

$$\sigma_T(Ax_n)=\sigma_{T|Y}(Ax_n)\subseteq\sigma_{T|Y}(x_n)=\sigma_T(x_n)\subseteq\sigma.$$

因此

$$Ax_n\in X_T(\sigma)\quad(n=1,2,\cdots),$$

所以

$$Ax=\lim_{n\to\infty}Ax_n\in\overline{X_T(\sigma)},$$

即

$$A\overline{X_T(\sigma)}\subseteq\overline{X_T(\sigma)}.$$

定理 2.1 设 $T\in\mathscr{B}(X)$有性质(AB_oC)，$\sigma\in\Sigma_2$，则存在射影算子 $\{P_\sigma\}_{\sigma\in\Sigma_2}$，使得

(i) Σ_2是$\mathbb{C}$的子集类构成的 Bool 代数；

(ii) $\{P_\sigma\}_{\sigma\in\Sigma_2}$是射影算子的 Bool 代数；

(iii) $P_\phi=0$，$P_{\mathbb{C}}=I$；

(iv) $\sum\limits_{k=1}^{n}P_{\sigma_k}=P_{\bigcup\limits_{k=1}^{n}\sigma_k}$，$\sigma_k\cap\sigma_j=\phi(j\neq k)$；

(v) $\|P_\sigma\|\leqslant K_\sigma$，$\sigma\in\Sigma_2$；

(vi) $P_\sigma T=TP_\sigma$，$\sigma\in\Sigma_2$；

(vii) $\sigma(T|P_\sigma X)\subseteq\bar{\sigma}$，$\sigma\in\Sigma_2$.

证明 仅需证明(vii)。由命题 2.5 及第二章定理2.2，

$$\sigma(T|P_\sigma X)=\sigma(T|\overline{X_T(\sigma)})\subseteq\sigma(T|X_T(\bar\sigma)\subseteq\bar\sigma.$$

定义 2.4 设 $T\in\mathscr{B}(X)$ 有性质(A)，令

$$\Sigma_3=\{\sigma|\sigma\in\Sigma_2,\text{存在渐升的}\mu_n,\nu_n\in\Sigma_2,$$
$$X=\bigvee_{n=1}^{\infty}[X_T(\mu^n)+X_T(\nu_n)],\mu_n\subseteq\sigma,\nu_n\subseteq\sigma^c;$$
$$n=1,2,\cdots\}.$$

显然Σ_3在余集运算下封闭，且$\phi,\mathbf{C}\in\Sigma_3$。

命题 2.6 设 $T\in\mathscr{B}(X)$ 有性质 (AB_σ)，$\sigma\in\Sigma_3$，则Σ_3是Bool 代数。

证明 只须证明：若 $\sigma,\tilde\sigma\in\Sigma_3$，必 $\sigma\cup\tilde\sigma\in\Sigma_3$。令 $\mu_n,\tilde\mu_n,\nu_n,\tilde\nu_n\in\Sigma_2$，而且$\mu_n\subseteq\sigma$，$\nu_n\subseteq\sigma^c$；$\tilde\mu_n\subseteq\tilde\sigma$，$\tilde\nu_n\subseteq\tilde\sigma^c$，根据定义2.4，

$$X=\bigvee_{n=1}^{\infty}\{X_T(\mu_n)+X_T(\nu_n)\}=\bigvee_{n=1}^{\infty}\{X_n(\tilde\mu_n)+X_T(\tilde\nu_n)\}$$

于是

$$x=\lim_{n\to\infty}[\tilde x_n+\tilde y_n],\quad \tilde x_n\in X_T(\tilde\mu_n),\quad \tilde y_n\in X_T(\tilde\nu_n).$$

注意，$\tilde x_n,\tilde y_n\in\bigvee_{n=1}^{\infty}\{X_T(\mu_n)+X_T(v_n)\}$，所以

$$\tilde x_n=\lim_{m\to\infty}[x'_{n,m}+x''_{n,m}],\quad x'_{n,m}\in X_T(\mu_m),\quad x''_{n,m}\in X_T(\nu_m),$$
$$\tilde y_n=\lim_{m\to\infty}[y'_{n,m}+y''_{n,m}],\quad y'_{n,m}\in X_T(\mu_m),\quad y''_{n,m}\in X_T(\nu_m).$$

由对角线原则，

$$x=\lim_{n\to\infty}[x'_{n,n}+x''_{n,n}+y'_{n,n}+y''_{n,n}].$$

因为

$$x'_{n,n}\in X_T(\tilde\mu_n\cap\mu_n),\quad x''_{n,n}\in X_T(\tilde\mu_n\cap\nu_n),$$
$$y'_{n,n}\in X_T(\tilde\nu_n\cap\mu_n),\quad y''_{n,n}\in X_T(\tilde\nu_n\cap\nu_n).$$

令 $u_n=x'_{n,n}+x''_{n,n}+y'_{n,n}$，$v_n=y''_{n,n}$。由于

$$\sigma_n=(\tilde\mu_n\cap\tilde\mu_n)\cup(\mu_n\cap\nu_n)\cup(\tilde\nu_n\cap\mu_n)\subseteq\sigma\cup\tilde\sigma,$$
$$\sigma'_n=\tilde\nu_n\cap\nu_n\subseteq(\sigma\cup\tilde\sigma)^c$$

而且，

$$\sigma_n, \sigma_n' \in \Sigma_2,$$

$$x = \lim_{n\to\infty}(u_n + v_n),\quad u_n \in X_T(\sigma_n),\quad v_n \in X_T(\sigma_n').$$

这样，

$$X = \bigvee_{n=1}^{\infty}\{X_T(\sigma_n) + X_T(\sigma_n')\}, \sigma_n \subseteq \sigma \cup \sigma, \sigma_n' \subseteq (\sigma \cup \sigma)^c.$$

由定义2.4，$\sigma \cup \sigma \in \Sigma_3$，因此 Σ_3 是Bool代数。

注意　由定理2.1可见

$$\Sigma_3 = \{\sigma \mid \sigma \in \Sigma_2,\ x = \lim_{n\to\infty}(P_{\mu_n}x + P_{\nu_n}x);$$
$$\mu_n \subseteq \sigma, \nu_n \subseteq \sigma^c, \mu_n, \nu_n \in \Sigma_2\}.$$

命题 2.7　设 $T \in \mathscr{B}(X)$ 有性质(A)，则

(i)　$\sigma(T) \in \Sigma_3$，且 $X_T(\sigma(T)) = X$，

(ii)　对 $\rho(T)$ 之子集 δ，$\delta \in \Sigma_3$，且 $X_T(\delta) = \{0\}$.

证明　因为 $\sigma_T(x) \subseteq \sigma(T)$，故 $\sigma(T) \in \Sigma_2$。又 $\sigma(T) \in \mathscr{F}$ 且 $X_T(\sigma(T)) = X$，故 $\sigma(T) \in \Sigma_3$. 若 $\delta \subseteq \rho(T)$，则$\sigma(T) \subseteq \delta^c$，$\phi \subset \delta$，而且$\delta(T)$，$\phi \in \mathscr{F}$。因此

$$X = \overline{X_T(\sigma(T)) + X_T(\phi)},$$

所以 $\delta \in \Sigma_3$。因为 $X_T(\rho(T)) = \{0\}$，所以

$$X_T(\delta) = X_T(\delta \cap \rho(T)) = X_T(\delta) \cap X_T(\rho(T)) = \{0\}.$$

定义 2.5　设$T \in \mathscr{B}(X)$有性质(A)，Σ是$\mathbf{C}$的子集类，称 T 有性质 (B_Σ)，若对任意$\sigma \in \Sigma$，$x \in X_T(\sigma)$，$y \in X_T(\sigma^c)$，存在仅与 T 及Σ有关常数 K，使得

$$\|x\| \leqslant K\|x + y\|.$$

显然若 T 有性质(B_Σ)，则 T 亦有性质(B_σ)，$\sigma \in \Sigma$.

注意Σ_3一般不是 σ-Bool代数，我们自然需把它扩张为 σ-Bool代数。

定义 2.6　设 $T \in \mathscr{B}(X)$有性质(A)，Σ表示由Bool代数 Σ_3 扩张产生的 σ-Bool代数（亦即 σ-域）。

定理 2.2　设 $T \in \mathscr{B}(X)$ 有性质(A)与(B_Σ)，则 T有 Σ类

谱测度。

证明 由定义2.6，Σ 是 σ-Bool 代数，再由命题2.4，$\{P_\sigma\}_{\sigma\in\Sigma}$是有界的射影算子 Bool 代数。据命题1.2，它是 Σ 类谱测度。

§3 谱 算 子

定义 3.1 $T\in\mathscr{B}(X)$ 称为 (Σ,Γ) 类谱算子 (Spectral operator)，若 T 具有(Σ,Γ)类单位分解。

特别，当$\Sigma=\mathscr{B}$ 时，称$(\mathscr{B},\Gamma)$ 类谱算子为Γ类准谱算子 (Prespectral operator)。又若 $\Gamma=X^*$，则称之为**谱算子**。

定理 3.1 $T\in\mathscr{B}(X)$具有性质(B_Σ)的(AC)算子，则 T 是(Σ,X^*)类谱算子。

这可由定理2.1及定理2.2得到。

下面我们要证明定理3.1之逆命题亦成立。

命题 3.1 设$T\in\mathscr{B}(X)$是Γ类准谱算子，$E(\cdot)$是其单位分解，又设$\sigma\in\mathscr{F}$，$\lambda_0\notin\sigma$而且$(\lambda_0I-T)x_0=0$，则成立

$$E(\sigma)x_0=0。E(\{\lambda_0\})x_0=x_0$$

证明 $\sigma\in\mathscr{F}$，由Γ类准谱算子的定义，$\sigma(T|E(\sigma)X)\subseteq\sigma$。又$\lambda_0\notin\sigma$，所以$\lambda_0\in\rho(T|E(\sigma)X)$。于是

$$R(\lambda_0,T|E(\sigma)X)(\lambda_0I-T|E(\sigma)X)E(\sigma)=E(\sigma).$$

由假设

$$(\lambda_0I-T)E(\sigma)x_0=E(\sigma)(\lambda_0I-T)x_0=0,$$

因此

$$R(\lambda_0,T|E(\sigma)X)(\lambda_0I-T|E(\sigma)X)E(\sigma)x_0=0.$$

从而

$$E(\sigma)x_0=0.$$

令

$$\sigma_n = \left\{\lambda \,\middle|\, |\lambda-\lambda_0| \geqslant \frac{1}{n}\right\} \quad (n=1,2,\cdots).$$

我们已证明 $E(\sigma_n)x_0=0 \ (n=1,2,\cdots)$，$E(\cdot)$ 是 Γ 可数可加的，对 $x^*\in\Gamma$，

$$x^*E(\{\lambda_0\}^c)x_0=\lim_{n\to\infty}x^*E(\sigma_n)x=0.$$

从 Γ 之完整性，

$$E(\{\lambda_0\}^c)x_0=0.$$

因为 $X=E(\{\lambda_0\})X\dot{+}E(\{\lambda_0\}^c)X$，所以

$$x_0=E(\{\lambda_0\})x_0+E(\{\lambda_0\}^c)x_0=E(\{\lambda_0\})x_0.$$

定理 3.2 设 $T\in\mathscr{B}(X)$ 是 Γ 类准谱算子，则 T 有性质 (A)。

证明 设存在开集 D 及其上的解析函数 f，使得，

$$(\lambda I-T)f(\lambda)=0, \quad \lambda\in D.$$

若存在 $\lambda_0\in D$，使得 $f(\lambda_0)\neq 0$，则存在开圆盘 $U\subseteq D$，$\lambda_0\in U$，$f(\lambda)\neq 0$，当 $\lambda\in U$，而且

$$(\lambda I-T)f(\lambda)=0, \quad \lambda\in U.$$

令 $\lambda_n\in U$，$\lambda_n\to\lambda_0(n\to\infty)$，且 $\lambda_n\neq\lambda_0(n=1,2,\cdots)$，据前证明，

$$\begin{aligned}0&=E(\{\lambda_0\})E(\{\lambda_n\})f(\lambda_n)\\&=E(\{\lambda_0\})f(\lambda_n).\end{aligned}$$

又

$$E(\{\lambda_0\})f(\lambda_n)\to E(\{\lambda_0\})f(\lambda_0)=f(\lambda_0).$$

这与 $f(\lambda_0)\neq 0$ 相矛盾。

定理 3.3 设 $T\in\mathscr{B}(X)$ 是 Γ 类准谱算子，$E(\cdot)$ 是其单位分解，则

$$E(\sigma)X=X_T(\sigma), \quad \sigma\in\mathscr{F}.$$

证明 令 $y\in E(\sigma)X$，则 $y=E(\sigma)x$，$x\in X$。由于 $TE(\sigma)=E(\sigma)T$，可见 $E(\sigma)X$ 是 T 的不变子空间，所以

$$\sigma_T(y)=\sigma_{T|E(\sigma)X}(y)\subseteq\sigma(T|E(\sigma)X)\subseteq\sigma, \quad \sigma\in\mathscr{F}.$$

因此，$y\in X_T(\sigma)$。反之，令$\sigma^c=\bigcup_{n=1}^{\infty}\sigma_n$，$\sigma_n\subseteq\sigma_{n+1}$，$\sigma_n\in\mathscr{F}$ $(n=1,2,\cdots)$。若$y\in X_T(\sigma)$，由第一章定理2.1，

$$\sigma_T(E(\sigma_n)y)\subseteq\sigma_T(y)\subseteq\sigma.$$

因为

$$\sigma_T(E(\sigma_n)y)=\sigma_{T|E(\sigma_n)X}(E(\sigma_n)y)\subseteq\sigma(T|E(\sigma_n)X)\subseteq\sigma_n,$$

所以

$$\sigma_T(E(\sigma_n)y)\subseteq\sigma\cap\sigma_n=\phi,$$

即$E(\sigma_n)y=0$。从$E(\cdot)y$的Γ可数可加性，

$$x^*E(\sigma^c)y=\lim_{n\to\infty}x^*E(\sigma_n)y=0,\ x^*\in\Gamma,$$

因此，$E(\sigma^c)y=0$。而

$$y=E(\sigma)y+E(\sigma^c)y=E(\sigma)y,\ \sigma\in\mathscr{F}.$$

所以

$$y\in E(\sigma)X.$$

命题 3.2 设$T\in\mathscr{B}(X)$是Γ类准谱算子，则$E(\sigma(T))=I$.

证明 由定理3.2，T有性质(A)，又$\sigma(T)\in\Sigma_3\subseteq\mathscr{B}$，故

$$\rho(T)=\sigma(T)^c\in\Sigma_3\subseteq\mathscr{B}.$$

由命题2.7，

$$E(\rho(T))x=0.$$

但是$E(\cdot)$是Bool代数，

$$\sigma(T)\cap\rho(T)=\phi,\ \sigma(T)\cup\rho(T)=\mathbb{C}$$

所以对任意$x\in X$，

$$E(\sigma(T))x=E(\sigma(T))x+E(\rho(T))x=E(\mathbb{C})x=x.$$

定理 3.4 $T\in\mathscr{B}(X)$是谱算子当且仅当T是具有性质$(B_{\mathscr{B}})$的(AC)算子。

证明 充分性可由定理3.1得到。至于必要性，从定理3.2及定理3.3知T是(AC)算子，平面上一切Borel集类$\mathscr{B}$是σ-Bool代数，而且T之谱测度$E(\cdot)x$是弱可数可加的，由命题1.2知，T有性质$(B_{\mathscr{B}})$。

定理 3.5 设$T\in\mathscr{B}(X)$是谱算子，$E(\cdot)$是其单位分解，又$AT=TA$，则

$$AE(\sigma)=E(\sigma)A, \sigma\in\mathscr{B}.$$

证明 令$\sigma\in\mathscr{F}$。由定理 3.3

$$E(\sigma)X=X_T(\sigma).$$

又$AT=TA$，故$\sigma_T(Ax)\subseteq\sigma_T(x)$，所以

$$AE(\sigma)X\subseteq E(\sigma)X,$$

从而

$$E(\sigma)AE(\sigma)=AE(\sigma).$$

令$\sigma^c=\bigcup_{n=1}^{\infty}\sigma_n, \sigma_n\in\mathscr{F}$且$\sigma_n\subseteq\sigma_{n+1}$。于是

$$E(\sigma)AE(\sigma_n)=E(\sigma)E(\sigma_n)AE(\sigma_n)=E(\sigma\cap\sigma_n)AE(\sigma_n).$$

由于$\sigma_n\subseteq\sigma^c$，所以$\sigma\cap\sigma_n=\phi$，这样

$$E(\sigma)AE(\sigma_n)=0.$$

因为T是谱算子，$E(\cdot)x$是可数可加的，因此

$$E(\sigma)AE(\sigma^c)=0.$$

由前证等式，

$$\begin{aligned}E(\sigma)A&=E(\sigma)A[E(\sigma)+E(\sigma^c)]\\&=E(\sigma)AE(\sigma)\\&=AE(\sigma).\end{aligned}$$

这样，

$$E(\sigma)A=AE(\sigma), \quad \sigma\in\mathscr{F}.$$

再由$E(\cdot)x$之可数可加性，

$$AE(\sigma)=E(\sigma)A, \quad \sigma\in\mathscr{B}.$$

需指出该定理的证明中用到$E(\cdot)x$的可数可加性，这对一般Γ类准谱算子的单位分解$x^*E(\cdot)x$，$x^*\in\Gamma(\Gamma\neq X^*)$的可数可加性是不行的。因此此定理对$\Gamma(\Gamma\neq X^*)$类的准谱算子是不成立的。关于这一点，Fixman 于1959 年就举出反例了。

命题 3.3 $T\in\mathscr{B}(X)$是谱算子，则T的单位分解是唯一的。

证明 令 $E(\cdot)$，$F(\cdot)$是 T 的两个单位分解，令 $\sigma\in\mathscr{F}$。由定理 3.3，

$$E(\sigma)F(\sigma)=F(\sigma),\ F(\sigma)E(\sigma)=E(\sigma).$$

从定理 3.5，$E(\sigma)F(\sigma)=F(\sigma)E(\sigma)$，故

$$E(\sigma)=F(\sigma),\ \sigma\in\mathscr{F}.$$

$E(\cdot)$，$F(\cdot)$皆强可数可加，因此

$$E(\sigma)=F(\sigma),\ \sigma\in\mathscr{B}.$$

命题 3.4 设 $T\in\mathscr{B}(X)$是谱算子，则

$$E(\sigma)X=\overline{X_T(\sigma)},\ \sigma\in\mathscr{B}.$$

证明 由定理3.2及定理3.3，T 是(AC)算子。令 $x\in X_T(\sigma)$，$y\in X_T(\sigma^c)$，于是 $\sigma_T(x)\subseteq\sigma$，$\sigma_T(y)\subseteq\sigma^c$。这样，

$$x\in X_T(\sigma_T(x))\subseteq X_T(\sigma),\ y\in X_T(\sigma_T(y))\subseteq X_T(\sigma^c).$$

由定理 3.3，

$$E(\sigma_T(x))X=X_T(\sigma_T(X)),\ E(\sigma_T(y))X=X_T(\sigma_T(y)).$$

因此

$$E(\sigma_T(x))x=x,\ E(\sigma_T(y))y=y.$$

从而

$$E(\sigma)x=E(\sigma)E(\sigma_T(x))x=E(\sigma\cap\sigma_T(x))x=x,$$

$$E(\sigma)y=E(\sigma)E(\sigma_T(y))y=E(\sigma\cap\sigma_T(y))y=0.$$

所以

$$\|x\|=\|E(\sigma)x\|=\|E(\sigma)(x+y)\|\leqslant\|E(\sigma)\|\|x+y\|.$$

令 $K_\sigma=\|E(\sigma)\|$，$\sigma\in\mathscr{B}$，我们有

$$\|x\|\leqslant K_\sigma\|x+y\|,\ \sigma\in\mathscr{B}.$$

这说明 T 具有性质(B_σ)，由命题 3.3，定理 2.1 和命题2.1，

$$E(\sigma)X=\overline{X_T(\sigma)},\ \sigma\in\mathscr{B}.$$

§4 谱算子的等价条件

定理 4.1 $T\in\mathscr{B}(X)$是谱算子当且仅当T 是(AC)算子。

而且

(i) $\overline{X_T(\sigma)} = \overline{X_T(\sigma\cap\delta)} \oplus \overline{X_T(\sigma\cap\delta^c)}$, $\sigma,\delta\in\mathscr{B}$.

(ii) $\sup\limits_{\delta\in B}\{\|x_\delta\| + \|x_{\delta^c}\|\}\leqslant M_x$, $M_x>0$ 是常数, $x_\delta\in\overline{X_T(\delta)}$, $x_{\delta^c}\in\overline{X_T(\delta^c)}$, $\delta\in\mathscr{B}$.

证明 必要性。由定理 3.2及定理3.3知，T是 (AC) 算子，由命题 3.4，

$$E(\sigma)X = \overline{X_T(\sigma)},$$
$$E(\sigma\cap\delta)X = \overline{X_T(\sigma\cap\delta)},$$
$$E(\sigma\cap\delta^c)X = \overline{X_T(\sigma\cap\delta^c)},$$

而且

$$E(\sigma) = E(\sigma\cap\delta) + E(\sigma\cap\delta^c), \quad \sigma,\delta\in\mathscr{B}.$$

故(i)式成立。又由定理 3.4，

$$\|E(\sigma)\|\leqslant K, \quad \sigma\in\mathscr{B}.$$

因此，由 ，

$$\|x_\delta\| + \|x_{\delta^c}\| = \|E(\delta)x\| + \|E(\delta^c)x\|\leqslant 2K\|x\|,$$

即(ii)成立。

充分性。令 P_δ 为按条件(i)

$$X = \overline{X_T(\delta)} \oplus \overline{X_T(\delta^c)}, \quad \delta\in\mathscr{B},$$

由 X 到 $\overline{X_T(\delta)}$ 上的射影算子.据闭图形定理可知，P_δ是有界射影算子。由(ii),

$$\{\|P_\delta x\|\}_{\delta\in\mathscr{B}} = \{\|x_\delta\|\}_{\delta\in\mathscr{B}}, \quad x\in X$$

对每个 $x\in X$ 是有界的，据共鸣定理知，存在常数 $M>0$，使

$$\|P_\delta\|\leqslant M, \quad \delta\in\mathscr{B}.$$

若$x_\delta\in\overline{X_T(\delta)}$, $x_{\delta^c}\in\overline{X_T(\delta^c)}$, 由(i)知，对于$x = x_\delta + x_{\delta^c}$ 有

$$P_\delta x_\delta = x_\delta, P_\delta x_{\delta^c} = 0, \delta\in\mathscr{B}.$$

于是

$$\|x_\delta\| = \|P_\delta x_\delta\| = \|P_\delta(x_\delta + x_{\delta^c})\|\leqslant\|P_\delta\|\|x_\delta + x_{\delta^c}\|$$
$$\leqslant M\|x_\delta + x_{\delta^c}\|, \quad \delta\in\mathscr{B}$$

这说明 T 具有性质$(AB_{\mathscr{B}}C)$，由定理 3.4，T 是谱算子。

定理 4.2 $T\in\mathscr{B}(X)$ 是谱算子当且仅当 T 有性质(A)，而且

(i) $P(F)X=X_T(F)$，$F\in\mathscr{F}$；

(ii) 若 $F_n\subseteq F_{n+1}$，$F_n\in\mathscr{F}$ $(n=1,2,\cdots)$，则$\lim\limits_{n\to\infty}P(F_n)$存在；

(iii) 若$F_n\subseteq F_{n+1}$，$F_n\in\mathscr{F}$ $(n=1,2,\cdots)$且$F_n\uparrow\boldsymbol{C}$. 则有$\lim\limits_{n\to\infty}P(F_n)x=x$，$x\in X$.

证明 必要性可由谱算子定义及定理 3.3 得到，往证充分性. 由假设知 T 有性质(A)，又由(i)知，T 是(AC)算子.

令 $F_n\in\mathscr{F}$，$F_n\uparrow F^c$ $\quad(n=1,2,\cdots)$. 由(i)，

$$P(F\cup F_n)X=X_T(F\cup F_n),\ P(F)X=X_T(F),$$

$$P(F_n)X=X_T(F_n)\qquad(n=1,2,\cdots).$$

注意 $F\cap F_n=\phi\quad(n=1,2,\cdots)$，据第二章定理 2.3，

$$X_T(F\cup F_n)=X_T(F)\oplus X_T(F_n)\qquad(n=1,2,\cdots).$$

又 $X_T(F)$，$X_T(F_n)\in\operatorname{Lat}T$，所以

$$P(F)P(F_n)=P(F_n)P(F),$$

故

$$P(F\cup F_n)=P(F)+P(F_n),P(F)P(F_n)=0,$$

这样，

$$P(F)\vee P(F_n)=P(F\cup F_n),\ P(F)\wedge P(F_n)=0.$$

由于 $F\cup F_n\uparrow\boldsymbol{C}$，故由(iii)，

$$\lim_{n\to\infty}P(F\cup F_n)=I,$$

或者

$$\bigvee_{n=1}^{\infty}\{X_T(F)\oplus X_T(F_n)\}=X.$$

于是

$$X=\bigvee_{n=1}^{\infty}\{X_T(F)\oplus X_T(F_n)\}\subseteq\overline{X_T(F)+X_T(F^c)}\subseteq X.$$

因此

$$X = \overline{X_T(F)} + \overline{X_T((F^c)}, \quad F \in \mathscr{F}.$$

从而 $F \in \Sigma_1$。注意

$$P(F \cup F_n) = P(F) + P(F_n) \quad (n = 1, 2, \cdots).$$

由条件(ii)和(iii)，

$$x = \lim_{n \to \infty} P(F \cup F_n)x = P(F)x + \lim_{n \to \infty} P(F_n)x, \quad x \in X.$$

因此

$$\lim_{n \to \infty} P(F_n)x = [I - P(F)]x, \quad x \in X.$$

我们可定义

$$P(F^c) = \lim_{n \to \infty} P(F_n).$$

它的定义是合理的。不难验证$P(F^c)$是由X到$\overline{X_T(F^c)}$上的射影算子，而且

$$P(F)P(F^c) = P(F^c)P(F).$$

由此可见，

$$P(F) \vee P(F^c) = I, \quad P(F) \wedge P(F^c) = \phi.$$

对于 $F \in \mathscr{F}$ 及开集 G，我们自然可定义

$$P(F \cap G) = \lim_{n \to \infty} P(F \cap F_n), \quad F_n \in \mathscr{F}, F_n \uparrow G.$$

我们证明

$$\overline{X_T(F \cap G)} = \bigvee_{n=1}^{\infty} X_T(F \cap F_n),$$

$$P(F \cap G)X = \overline{X_T(F \cap G)}.$$

显然

$$X_T(F \cap F_n) \subseteq \overline{X_T(F \cap G)}.$$

因此，$\bigvee_{n=1}^{\infty} X_T(F \cap F_n) \subseteq \overline{X_T(F \cap G)}$.

另一方面，若$x \in \overline{X_T(F \cap G)}$，则

$$x = \lim_{n \to \infty} x_n, \quad x_n \in X_T(F \cap G) \quad (n = 1, 2, \cdots).$$

因此 $\sigma_T(x_n) \subseteq F \cap G$. 注意 $\sigma_T(x_n)$ 是紧集，存在自然数 n_m，适当选取$F_n \uparrow G$，有

$$\sigma_T(x_m) \subseteq F \cap F_{n_m},$$

这样，

$$x_m \in X_T(F \cap F_{n_m}),$$

因此

$$x_m \in \bigvee_{m=1}^{\infty} X_T(F \cap F_{n_m}) \subseteq \bigvee_{n=1}^{\infty} X_T(F \cap F_n).$$

于是

$$x \in \bigvee_{n=1}^{\infty} X_T(F \cap F_n),$$

所以

$$\overline{X_T(F \cap G)} = \bigvee_{n=1}^{\infty} X_T(F \cap F_n).$$

同样可定义 $P(F \cap G) = \lim\limits_{n\to\infty} P(F \cap F_n)$. 不难验证 $P(F \cap G)$是从X到 $\overline{X_T(F \cap G)}$ 上的射影算子，因此对任意$x \in X$，有$\sigma_T(x) \in \mathscr{F}$，从而

$$P(\sigma_T(x))X = X_T(\sigma_T(x)),$$
$$P(\sigma_T(x) \cap F)X = X_T(\sigma_T(x) \cap F),$$
$$P(\sigma_T(x) \cap F^c)X = \overline{X_T(\sigma_T(x) \cap F^c)},$$

而且

$$P(\sigma_T(x) = P(\sigma_T(x) \cap F) + P(\sigma_T(x) \cap F^c).$$

因此

$$X_T(\sigma_T(x)) = \overline{X_T(\sigma_T(x) \cap F) + X_T(\sigma(x) \cap F^c)}, \quad F \in \mathscr{F}.$$

所以 $F \in \Sigma_2$.

对 $F \in \Sigma_2$, 取 $\mu_n = F$, $\nu_n = F_n$, $F_n \uparrow F^c$, $F, F_n \in \mathscr{F}$ $(n = 1, 2, \cdots)$. 由条件(ii)及前边的证明，

$$P(F^c) = \lim_{n\to\infty} P(\nu_n), \quad P(F) \vee P(F^c) = I.$$

因此

$$x = \lim_{n\to\infty} [P(\mu_n)x + P(\nu_n)x],$$

即

$$X = \overline{X_T(\mu_n) + X_T(\nu_n)}, \quad \mu_n \subseteq F, \ \nu_n \subseteq F^c.$$

从而

$$F\in\Sigma_3,\ F\in\Sigma\subseteq\mathscr{B}.$$

注意Σ是 σ-Bool 代数，所以必有$\Sigma=\mathscr{B}$。由定理 2.1，条件(ii)与(iii) 知，$P(\sigma),\sigma\in\mathscr{B}$，是$T$ 的谱测度且是 T 的单位分解，所以 T 是谱算子。

§5 典型分解

若X 是有限维欧氏空间，T是 X 上线性算子；$\sigma(T)=\{\lambda_k\}_{k=1}^n$；$\lambda_k$是$T$的相异的$\nu_k$重特征值(几何重数)；$E(\lambda_i)$表示相应于$\lambda_k$之根子空间上的直交射影算子；

$$E(\lambda_k)X=\{x\,|\,(T-\lambda_k I)^{\nu_k}x=0\},$$

$$T=\sum_{k=1}^n TE(\lambda_k)=\sum_{k=1}^n\lambda_k E(\lambda_k)+\sum_{k=1}^n(T-\lambda_k I)E(\lambda_k).$$

令

$$S=\sum_{k=1}^n\lambda_k E(\lambda_k),\quad N=\sum_{k=1}^n(T-\lambda_k I)E(\lambda_k),$$

则 S 是对角矩阵表示的算子，N 是幂零算子，$SN=NS$，且 $T=S+N$。此即T 的 Jordan 典型分解。

定义 5.1 $S\in\mathscr{B}(X)$称为标算子 (scalar type)，若 S 是谱算子，且

$$S=\int_{\sigma(S)}\lambda E(d\lambda).$$

其中$E(\cdot)$是 S 的单位分解。

命题 5.1 设 $S,N\in\mathscr{B}(X)$，$SN=NS$，又 N 是拟幂零算子，则 $\sigma(S+N)=\sigma(S)$。

证明 由于N是拟幂零算子，

$$\|N\|^k=o(\varepsilon^k),\ \varepsilon>0,$$

这样对于$\lambda\in\rho(S)$，级数$\sum_{k=0}^\infty N^k R(\lambda,S)^k$在一致算子拓扑下收敛，而且

$$\left\{\sum_{k=0}^{\infty} N^k R(\lambda,s)^k\right\} \cdot \{I - NR(\lambda,s)\}$$

$$= \{I - NR(\lambda,S)\} \cdot \left\{\sum_{k=0}^{\infty} N^k R(\lambda,S)^k\right\}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} N^k R(\lambda,S)^k - \sum_{k=1}^{\infty} N^k R(\lambda,S)^k$$

$$= I.$$

因此

$$\sum_{k=0}^{\infty} N^k R(\lambda,S)^k = (I - NR(\lambda,S))^{-1},$$

从而

$$(\lambda I - S - N)^{-1} = R(\lambda,S)(I - NR(\lambda,S))^{-1}.$$

故

$$\lambda \in \rho(S+N), \quad \sigma(S+N) \subseteq \sigma(S).$$

相反包含关系可类似地证明.

定理 5.1 $T \in \mathscr{B}(X)$是谱算子当且仅当$T = S + N, SN = NS$，其中 S 是标算子，N是拟幂零算子．此外该分解是唯一的，T 与 S 有相同的单位分解．

证明 充分性．设 $T = S + N$，$SN = NS$，S 的单位分解为 $E(\cdot)$，由定理 3.5，

$$NE(\sigma) = E(\sigma)N, \quad \sigma \in \mathscr{B}.$$

因此，$TE(\sigma) = E(\sigma)T$，$\sigma \in \mathscr{B}$．为此要证明 $E(\cdot)$ 是 T 的单位分解，只须证明

$$\sigma(T|E(\sigma)X) \subseteq \bar{\sigma}, \quad \sigma \in \mathscr{B}.$$

由命题 5.1，

$$\sigma(T|E(\sigma)X) = \sigma(S|E(\sigma)X), \quad \sigma \in \mathscr{B}.$$

$E(\cdot)$ 是标算子 S 的单位分解，故

$$\sigma(S|E(\sigma)X) \subseteq \bar{\sigma}, \quad \sigma \in \mathscr{B}.$$

T 是以 $E(\cdot)$为单位分解的谱算子，而且 S 与 T 有相同的单位

分解，由命题 3.3，S 的单位分解是唯一的；S 被唯一确定，从而$N=T-S$被唯一确定，即分解是唯一的，且 $\sigma(T)=\sigma(S)$。

必要性。设 T 是谱算子，定义

$$S=\int_{\sigma(S)}\lambda E(d\lambda),\quad N=T-S,$$

其中 $E(\cdot)$是 T 的单位分解.由定义 5.1，S是以 $E(\cdot)$为单位分解的标算子。由于 T 与 $E(\cdot)$可交换，故T 与 S 可交换，S与N亦可交换。往证N是拟幂零算子。

令 $\varepsilon>0$，$C_\varepsilon=\{\lambda\|\lambda|\leqslant\varepsilon\}$，分$\sigma(T)$ 为半径 $r<\varepsilon$ 的不相交的 Borel 子集$\{\sigma_i\}_{i=1}^k$。令

$$N_{\sigma_i}=N|E(\sigma_i)X,\quad R_i=R(\lambda,N_{\sigma_i}),\quad \lambda\in\bigcap_{i=1}^k\rho(N_{\sigma_i})$$

再令 $R=\sum\limits_{i=1}^k R_iE(\sigma_i)$。我们有

$$(\lambda I-N)R=\sum_{i=1}^k(\lambda I-N_{\sigma_i})R_iE(\sigma_i)=\sum_{i=1}^kE(\sigma_i)=I,$$

$$\begin{aligned}R(\lambda I-N)&=\sum_{i=1}^kR(\lambda I-N)E(\sigma_i)\\&=\sum_{i=1}^kR(\lambda I-N_{\sigma_i})E(\sigma_i)\\&=\sum_{i=1}^kR_i(\lambda I-N_{\sigma_i})E(\sigma_i)\\&=\sum_{i=1}^kE(\sigma_i)\\&=I.\end{aligned}$$

这样，$\lambda\in\rho(N)$，从而

$$\sigma(N)\subseteq\bigcup_{i=1}^k\sigma(N_{\sigma_i}).$$

注意

$$N_{\sigma_i}=(T-\lambda_i I)|E(\sigma_i)X+(\lambda_i I-S)|E(\sigma_i)X,$$
$$\lambda_i\in\sigma(T|E(\sigma_i)X).$$

因为 $\sigma(T|E(\sigma_i)X)\subseteq\bar{\sigma}_i$，我们有

$$\sigma((T-\lambda_i I)|E(\sigma_i)X)\subseteq\bar{\sigma}_i-\lambda_i\subseteq C_r\subseteq C_\varepsilon.$$

因为

$$\lambda_i I-S|E(\sigma_i)X=\int_{\sigma_i}(\lambda_i-\lambda)E(d\lambda)|E(\sigma_i)X,$$

所以

$$\|\lambda_i I-S|E(\sigma_i)X\|\leqslant K\max_{\lambda\in\sigma_i}|\lambda-\lambda_i|\leqslant rK.$$

但是

$$|\sigma((\lambda_i I-S)|E(\sigma_i)X)|\leqslant\|\lambda_i I-S|E(\sigma_i)X\|\leqslant rK,$$

取 r 充分小，使得

$$\sigma((\lambda_i I-S)|E(\sigma_i)X)\subseteq C_\varepsilon,\ \varepsilon>0,$$

这样，

$$\sigma(N_i)\subseteq\sigma((T-\lambda_i I)|E(\sigma_i)X)\cup\sigma((\lambda_i I-S)|E(\sigma_i)X)$$
$$\subseteq C_\varepsilon.$$

可见

$$\sigma(N)\subseteq C_\varepsilon,\ \varepsilon>0.$$

由 $\varepsilon>0$ 之任意性，$\sigma(N)=\{0\}$，所以N是拟幂零算子.

我们称 $T=S+N$ 之分解为 T 之典型分解 (Canonical decomposition)，S 称为 T 之标部 (Scalar part)，N称为T之根部 (radical part). 若N是 m 阶幂零算子，则称 T 是 m 阶谱算子.

§6 谱算子的函数演算

命题 6.1 设 $T\in\mathscr{B}(X)$ 是谱算子，$E(\cdot)$是 T 的单位分解，N是T 的根部，则

$$R(\xi,T)=\sum_{n=0}^{\infty}N^n\int_{\sigma(T)}\frac{E(d\lambda)}{(\xi-\lambda)^{n+1}},\qquad \xi\in\rho(T);$$

右端级数在算子一致拓扑下收敛，而且关于 $\rho(T)$ 之任意闭子集上一致的。

证明 令 $F\subseteq\rho(T)$ 是一闭子集，$\xi\in F$，函数 $(\xi-\lambda)^{-n}$在 $\sigma(T)$上有界，因此积分

$$\int_{\sigma(T)}\frac{E(d\lambda)}{(\xi-\lambda)^{n+1}}$$

有意义，而且

$$\left\|\int_{\sigma(T)}\frac{E(d\lambda)}{(\xi-\lambda)^{n+1}}\right\|\leqslant Kr^{n+1},\quad K=\int_{\sigma(T)}\|E(d\lambda)\|,$$

$$r=\sup_{\substack{\lambda\in\sigma(T)\\ \xi\in F}}|\xi-\lambda|^{-1}.$$

因为$\|N^n\|^{\frac{1}{n}}\to 0$，级数$\sum_{n=0}^{\infty}\|N^n\|r^{n+1}$ 收敛，于是级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}N^n\int_{\sigma(T)}\frac{E(d\lambda)}{(\xi-\lambda)^{n+1}}$$

在一致算子拓扑下收敛，且关于$\xi\in F$ 是一致的。于是对T 之标部 S 有

$$(\xi I-S)\int_{\sigma(T)}\frac{E(d\lambda)}{(\xi-\lambda)^{n+1}}=\left[\int_{\sigma(T)}(\xi-\lambda)E(d\lambda)\right]\left[\int_{\sigma(T)}\frac{E(d\lambda)}{(\xi-\lambda)^{n+1}}\right]$$

$$=\int_{\sigma(T)}\frac{E(d\lambda)}{(\xi-\lambda)^{n}},$$

从而

$$(\xi I-T)\left[\sum_{n=0}^{\infty}N^n\int_{\sigma(T)}\frac{E(d\lambda)}{(\xi-\lambda)^{n+1}}\right]$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left[N^n\int_{\sigma(T)}\frac{E(d\lambda)}{(\xi-\lambda)^{n}}-N^{n+1}\int_{\sigma(T)}\frac{E(d\lambda)}{(\xi-\lambda)^{n+1}}\right]$$

$$=I.$$

定理 6.1 设 $T\in\mathscr{B}(X)$ 是谱算子，$E(\cdot)$ 是 T 的单位分解，N是T 的根部，则对于函数 $f\in\mathscr{F}(\sigma(T)$，有

$$f(T)=\sum_{n=0}^{\infty}N^n\frac{1}{n!}\int_{\sigma(T)}f^{(n)}(\lambda)E(d\lambda).$$

右端级数在一致算子拓扑下收敛。

证明 令 C 表示位于 $\rho(T)$ 内包围 $\sigma(T)$ 的光滑的 Jordan 曲线，对于 $f\in\mathscr{F}(\sigma(T))$，由 Riesz-Dunford 函数演算及命题6.1，

$$\begin{aligned}f(T)&=\frac{1}{2\pi i}\int_C f(\xi)R(\xi,T)d\xi\\&=\frac{1}{2\pi i}\sum_{n=0}^{\infty}N^n\int_C f(\xi)\left[\int_{\sigma(T)}\frac{E(d\lambda)}{(\xi-\lambda)^{n+1}}\right]d\xi\\&=\frac{1}{2\pi i}\sum_{n=0}^{\infty}N^n\int_{\sigma(T)}\left[\int_C\frac{f(\xi)}{(\xi-\lambda)^{n+1}}d\xi\right]E(d\lambda)\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{N^n}{n!}\int_{\sigma(T)}f^{(n)}(\lambda)E(d\lambda).\end{aligned}$$

定理 6.2 设 $T\in\mathscr{B}(X)$是谱算子，$f\in\mathscr{F}(\sigma(T))$；则 $f(T)$是谱算子，而且

$$E_{f(T)}(\sigma)=E_T(f^{-1}(\sigma)),\quad\sigma\in\mathscr{B},$$

其中 $E_{f(T)}(\cdot)$，$E_T(\cdot)$分别是$f(T)$与T 的单位分解。

证明 由定理 6.1，

$$\begin{aligned}f(T)&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{N^n}{n!}f^{(n)}(S)=f(S)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{N^n}{n!}f^{(n)}(S)\\&=f(S)+N_1.\end{aligned}$$

其中$N_1=\sum_{n=1}^{\infty}f^{(n)}(S)\frac{N^n}{n!}$.

注意 $S=\int_{\sigma(T)}\lambda E_T(d\lambda)$，由积分性质及函数演算，

$$f(S)=\int_{\sigma(T)}f(\lambda)E(d\lambda)=\int_{f(\sigma(T))}\mu E_T(f^{-1}(d\mu)).$$

$E_T(f^{-1}(\sigma))(\sigma\in\mathscr{B})$是$f^{-1}(\mathscr{B})$类单位分解，$\mathscr{B}=f^{-1}(\mathscr{B})$.故$f(S)$是标算子。

往证N_1是拟幂零算子。令

$$N_1^{(m)}=\sum_{n=1}^{m}f^{(n)}(S)\frac{N^n}{n!},$$

$N_1^{(m)}$在一致算子拓扑下收敛到N_1。由谱映像定理，$N_1^{(m)}$是拟幂零算子，所以对任意$\varepsilon>0$，存在m_ε，使得

$$\|N_1-N_1^{(m_\varepsilon)}\|\leqslant\varepsilon.$$

于是

$$\begin{aligned}\sigma(N_1)&\subseteq\sigma(N_1-N_1^{(m_\varepsilon)}+N_1^{(m_\varepsilon)})\\&\subseteq\sigma(N_1^{(m_\varepsilon)})+\sigma(N_1-N_1^{(m_\varepsilon)})\\&\subseteq\{0\}+\{\lambda\,|\,|\lambda|\leqslant\|N_1-N_1^{(m_\varepsilon)}\|\}\\&\subseteq\{\lambda\,|\,|\lambda|\leqslant\varepsilon\}.\end{aligned}$$

因此

$$\sigma(N_1)=\{0\}.$$

N_1是拟诸零算子，这样

$$f(T)=S_1+N_1,\quad S_1N_1=N_1S_1.$$

其中$S_1=\int_{\sigma(f(T))}\mu E_T(f^{-1}(d\mu))$是标算子；$N_1$是拟幂零算子.

由定理5.1，$f(T)$是谱算子，再由命题3.4及第一章定理3.2,

$$E_T(f^{-1}(\sigma))X=\overline{X_T(f^{-1}(\sigma))}=\overline{X_{f(T)}(\sigma)}=E_{f(T)}(\sigma)X,$$

其中$E_{f(T)}(\cdot)$是谱算子$f(T)$的单位分解。于是

$$E_{f(T)}(\sigma)=E_T(f^{-1}(\sigma)),\quad\sigma\in\mathscr{B}.$$

命题 6.2 设$T\in\mathscr{B}(X)$是m阶谱算子，$f\in\mathscr{F}(\sigma(T))$、则$f(T)$是$m$阶谱算子。

证明 由定理6.2的证明可知$f(T)$的根部

$$N_1=\sum_{n=1}^{\infty}f^{(n)}(S)\frac{N^n}{n!}.$$

由于 $N^{m+1}=0$，故 $N_1=\sum_{n=1}^{m}f^{(n)}(S)\frac{N^n}{n!}$，于是

$$N_1{}^{m+1}=0.$$

§7 Hilbert 空间上的谱算子

定理 7.1 设$\mathscr{C}$表示Hilbert空间H上有界线性算子构成的有界的可交换的含单位元的乘法群，则存在自伴可逆的有界线性算子B，使得$B\mathscr{C}B^{-1}$为酉算子群。

证明 令$\mathscr{L}$表示乘积空间$H\otimes H$上复函数构成的线性空间，$\mathscr{M}$是由$\mathscr{L}$中双线性对称的，且满足$f(x,x)\geqslant 0$的函数f组成的。在$\mathscr{L}$上给定弱的乘积拓扑，由集

$\{f\,|\,f\in\mathscr{L},\ |f(x,y)-g(x,y)|<\varepsilon\}$，$\varepsilon>0$，$x,y\in H$构成$\mathscr{L}$中$g$之邻域基。易见$\mathscr{M}$是$\mathscr{L}$中的闭集，对一切$T\in\mathscr{C}$，由$f(x,y)=(Tx,Ty)$确定的$f$构成$\mathscr{M}$中的凸集，令$\mathscr{K}$表示该凸集在$\mathscr{M}$中的闭包，则$\mathscr{K}$是$\mathscr{M}$中的凸闭子集。令$M$是$\mathscr{C}$中一切算子范数之上界，则

$$|(Tx,Ty)|\leqslant M^2\|x\|\|y\|,\quad f\in\mathscr{K}. \tag{7.1}$$

又因为

$$\|x\|^2=(T^{-1}Tx,T^{-1}Tx)\leqslant M^2\|Tx\|^2, \tag{7.1}$$

所以

$$\frac{\|x\|^2}{M^2}\leqslant\|Tx\|^2=f(x,x),\quad f\in\mathscr{K}. \tag{7.2}$$

由于$\mathscr{K}$在$\mathscr{M}$中闭，$\mathscr{M}$在$\mathscr{G}$中闭，从(7.1)式及乘积空间紧性的Tychonoff定理知，$\mathscr{K}$是紧的。对每个$T\in\mathscr{C}$，定义$\mathscr{L}$中连续线性映像J_T：

$$(J_Tf)(x,y)=f(Tx,Ty),\quad x,y\in H.$$

因为$J_{T_1}\cdot J_{T_2}=J_{T_1\cdot T_2}$，又$\mathscr{C}$是可交换的，故$\{J_T\}$是$\mathscr{L}$中的有界线性算子的交换群。又$J_T$映$\mathscr{K}$到$\mathscr{K}$内，由Markoev-Kakutani不动点定理，存在$f_0\in\mathscr{K}$，使得

$$J_T f_0=f_0,\quad T\in\mathscr{C}.$$

由对称的双线性性，存在自伴算子A，使得

$$f_0(x,y)=(Ax,y),$$

所以

$$(Ax,y)=(ATx,Ty)=(T^*ATx,y),\quad T\in\mathscr{C},$$

于是

$$A=T^*AT,\quad \forall T\in\mathscr{C}.$$

因为$f_0\in\mathscr{M}$，我们有$(Ax,x)=f_0(x,x)\geqslant 0$，所以$\sigma(A)$位于正实轴。若$E(\cdot)$是$A$的单位分解，则

$$B=\int_{\sigma(A)}\sqrt{\lambda}\,E(d\lambda)$$

是有界自伴算子，而且$B^2=A$，据(7.2)式

$$\frac{\|x\|^2}{M^2}\leqslant(Ax,x)=(B^2x,x)=\|Bx\|^2,$$

这表明B有单射的，因此BH是闭的，往证B^{-1}是处处有定义的。这只须证明只有$y=0$直交于BH。令y垂直于BH，则

$$0=(B^2y,y)=(By,By)=\|By\|^2.$$

从而$By=0$。B是单射的，故$y=0$。于是B是自伴的、从H到H上的线性同构映射。又$T^*AT=A$，故$B^2T=(T^*)^{-1}B^2$，并且$BTB^{-1}=B^{-1}(T^*)^{-1}B=[(BTB^{-1})^*]^{-1}$，因此$BTB^{-1}$是酉算子。

命题 7.1 设$\mathscr{B}_1,\mathscr{B}_2,\cdots,\mathscr{B}_k$是Hilbert空间$H$上有界可交换的射影算子的Bool代数，则存在具有有界逆的自伴算子B，使BEB^{-1}是自伴射影算子，对每个由$\mathscr{B}_1,\mathscr{B}_2,\cdots,\mathscr{B}_k$产生的射影算子的Bool代数中的元$E$皆成立。

证明 对 $E\in\mathscr{B}_i(i=1,2,\cdots,k)$，令 $F(E)=I-2E$，则 $F(E)^2=I-4E+4E^2=I$。我们有 $F(E_1)F(E_2)=I-2E_1-2E_2+4E_1E_2=F[(E_1\cup E_2)\wedge(I-E\cap E_2)]$。这样，对一切 $E\in\mathscr{B}_i$，全体 $F(E)$ 的类 $\mathscr{C}_i$ $(i=1,2,\cdots,k)$ 构成 Hilbert 空间 H 中算子的有界的交换群。显然 $\mathscr{C}_i$ 与 $\mathscr{C}_j$ 中的元可交换，这样由 $g_i\in\mathscr{C}_i$ $(i=1,2,\cdots,k)$ 产生的 $\mathscr{C}$ 是 Hilbert 空间 H 中算子的有界的可交换群，据定理 7.1，存在一个有有界逆的算子 B，使得对一切 $E\in\mathscr{B}_i$ $(i=1,2,\cdots,k)$，$BF(E)B^{-1}=U$ 是酉算子。注意 $[F(E)]^2=I$，我们有 $U^2=I$，于是 $U^*=U^{-1}=U$，即 U 是自伴的，从而

$$BEB^{-1}=\frac{1}{2}B(I-F(E))B^{-1}=\frac{1}{2}(I-U),E\in\mathscr{B}_i$$

$(i=1,2,\cdots,k)$ 是自伴的。

定理 7.2 设 $S_1,\cdots,S_k$ 是 Hilbert 空间 H 中可交换的标算子，则存在有有界逆的自伴算子 B，使得 $BS_iB^{-1}(i=1,2,\cdots,k)$ 是正规算子。

证明 令 E_i 是 S_i 的单位分解，由命题7.1，存在有有界逆的自伴算子 B，使得

$$P_i(\sigma)=BE_i(\sigma)B^{-1},\quad \sigma\in\mathscr{B}\qquad(i=1,2,\cdots,k).$$

是自伴算子，这样

$$BS_iB^{-1}=\int_{\sigma(S_i)}x\,BE_i(d\lambda)B^{-1}$$

$$=\int_{\sigma(S_i)}\lambda P_i(d\lambda)\qquad(i=1,2,\cdots,k)$$

是正规算子。

命题 7.2 设 $T_i\in\mathscr{B}(H)$ $(i=1,2)$ 是可交换的谱算子，则 T_1+T_2，$T_1\cdot T_2$ 是谱算子。

证明 由定理 5.1，$T_i=S_i+N_i$ $(i=1,2)$，于是 S_1,S_2，N_1 与 N_2 是可交换的。从而 $T_1+T_2=S_1+S_2+N$，$T_1\cdot T_2=$

$S_1\cdot S_2Q$，此处 + 幂 N, Q 是拟零算子，且 $N(S_1+S_2)=(S_1+S_2)N$。$(S_1\cdot S_2)\cdot Q=Q\cdot(S_1\cdot S_2)$。于是只须证明 S_1+S_2，$S_1\cdot S_2$ 是标算子。

由定理 7.2，存在自伴算子 B，使得 BS_1B^{-1}，BS_2B^{-1} 是可交换的正规算子，据定理 3.5，

BS_1B^{-1}，BS_2B^{-1}，$(BS_1B^{-1})^*$，$(BS_2B^{-1})^*$

皆可交换，故 $BS_1B^{-1}+BS_2B^{-1}$，$(BS_1B^{-1})(BS_2B^{-1})$ 皆为正规算子，所以 S_1+S_2，$S_1\cdot S_2$ 是标算子。

§8 谱算子的对偶理论

定义 8.1 设 X 是复 Banach 空间，称 X 是 (OP) 型空间，若 X 不含有子空间拓扑同构于 (C_0) 空间。

定义 8.2 X 中元列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 称为基底序列，若 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 $\bigvee\limits_{n=1}^{\infty}\{x_n\}$ 之基底。

命题 8.1 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\subseteq X$ 是基底序列当且仅当存在常数 $K\geqslant 1$，使得

$$\left\|\sum_{n=1}^{p}t_nx_n\right\|\leqslant K\left\|\sum_{n=1}^{q}t_nx_n\right\|,$$

其中 $p\leqslant q$ 是自然数，t_i 是实数 $(i=1,2,\cdots,q)$。

证明 必要性。注意

$$\|x\|_1=\sup_N\left\|\sum_{n=1}^{N}x_n^*(x)x_n\right\|$$

是与 $\|x\|$ 等价范数，其中 $\{x_n^*\}_{n=1}^{\infty}\subseteq X^*$，且 $x_m^*(x_n)=\delta_{m,n}$，故存在常数 $K\geqslant 1$，使得

$$\|x\|\leqslant\|x\|_1\leqslant K\|x\|.$$

而

$$\left\|\sum_{n=1}^{p}t_nx_n\right\|_1=\sup_{1\leqslant k\leqslant p}\left\|\sum_{n=1}^{k}t_nx_n\right\|$$

$$\leqslant \sup_{1\leqslant k\leqslant q}\|\sum_{n=1}^{k}t_nx_n\|$$

$$=\|\sum_{n=1}^{q}t_nx_n\|_1,$$

所以

$$\|\sum_{n=1}^{p}t_nx_n\|\leqslant\|\sum_{n=1}^{p}t_nx_n\|_1$$

$$\leqslant\|\sum_{n=1}^{q}t_nx_n\|_1$$

$$\leqslant K\|\sum_{n=1}^{q}t_nx_n\|.$$

充分性．需证明 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 $\bigvee_{n=1}^{\infty}\{x_n\}$之基底． 注意对 $x\in$ $\bigvee_{n=1}^{\infty}\{x_n\}$有

$$x=\lim_{i\to\infty}\sum_{n=1}^{\infty}t_{i,n}x_n.$$

当 $i,j\to\infty$时，

$$\|\sum_{n=1}^{\infty}t_{i,n}x_n-\sum_{n=1}^{\infty}t_{j,n}x_n\|\to 0.$$

由假设，对自然数N，

$$\|\sum_{n=1}^{N}(t_{i,n}-t_{j,n})x_n\|\leqslant K\|\sum_{n=1}^{\infty}(t_{i,n}-t_{j,n})x_n\|,$$

因此，当 $i,j\to\infty$时，对N一致成立

$$\|\sum_{n=1}^{N}(t_{i,n}-t_{j,n})x_n\|\to 0,$$

于是 $\lim\limits_{i,j\to\infty}(t_{i,n}-t_{j,n})=0$，亦即

$$\lim_{i\to\infty}t_{i,n}=t_n \qquad (n=1,2,\cdots).$$

在前述不等式中，令 $j\to\infty$，则

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{N}\|\sum_{n=1}^{N}(t_{i,n}x_n-t_nx_n)\|=0.$$

因此$\sum_{n=1}^{\infty} t_n \cdot x_n$收敛，且$x=\sum_{n=1}^{\infty} t_n x_n$。若$x=\sum_{n=1}^{\infty} t_n' x_n$，由假设对任意自然数$N$，

$$\left\|\sum_{n=1}^{N}(t_n-t_n')x_n\right\|\leqslant K\left\|\sum_{n=1}^{\infty}(t_n-t_n')x_n\right\|=0.$$

因此，

$$t_n'=t_n \qquad (n=1,2,\cdots).$$

命题 8.2 设$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\subseteq X$，$\sum_{n=1}^{\infty} x_n$是弱无条件收敛的，则对任何数列$\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$，$\lim_{n\to\infty} t_n=0$，级数$\sum_{n=1}^{\infty} t_n x_n$是收敛的。

证明 令

$$Z_k=\{x^*\,|\,x^*\in X^*,\ \sum_{n=1}^{\infty}|x^*(x_n)|\leqslant k\} \qquad (k=1,2,\cdots).$$

显然Z_k是闭的，由假设条件，$X^*=\bigcup_{k=1}^{\infty} Z_k$，$X^*$是第二纲集，故知$\bigcup_{k=1}^{\infty} Z_k$有内点。据 Baire 定理，存在$Z_{k_0}$有内点，即$Z_{k_0}$含有一个半径为$r$的小球$U_r$，因此

$$\sum_{n=1}^{\infty}|x^*(x_n)|\leqslant k_0,\quad x^*\in U_r.$$

可见，存在常数$K>0$，使得

$$\sup_{\|x^*\|\leqslant 1}\sum_{n=1}^{\infty}|x^*(x_n)|\leqslant K.$$

从而

$$\left\|\sum_{i=1}^{\infty} t_i x_i\right\| \sup_{\|x^*\|\leqslant 1}\left|x^*\left(\sum_{i=1}^{n} t_i X_i\right)\right|$$

$$\leqslant \sup_{\|x^*\|\leqslant 1}\sum_{i=1}^{n}|x^*(x_i)|\sup_{m}|t_m|\leqslant K\sup_{n}|t_n|.$$

令 $t_n \to 0$，对有界序列 $\{0,\cdots,0,t_p,t_{p+1},\cdots,t_q,0,\cdots\}$，应有

$$\left\|\sum_{n=p}^{q} t_n x_n\right\| \leqslant K \sup_{p\leqslant i\leqslant q} |t_i| \to 0,\quad p\leqslant q\to\infty.$$

因此$\{\sum_{n=1}^{m} t_n x_n\}$是 Cauchy 列，故$\sum_{n=1}^{\infty} t_n x_n$收敛。

不难看出，完全类似于命题 8.2 的证明，我们有下述对偶形式：

命题 8.3 设 $\{x_n^*\}_{n=1}^{\infty} \subseteq X^*$，又$\sum_{n=1}^{\infty} x_n^*$弱* 无条件收敛，则对任意数列$\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$，$\lim_{n\to\infty} t_n = 0$。级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} t_n x_n^*$$

是收敛的。

定义 8.3 基底序列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 与 $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ 称为等价的，若

$$\left\{\{t_n\}_{n=1}^{\infty} \,\middle|\, \sum_{n=1}^{\infty} t_n x_n \text{ 收敛}\right\} = \left\{\{t_n\}_{n=1}^{\infty} \,\middle|\, \sum_{n=1}^{\infty} t_n y_n \text{收敛}\right\}.$$

命题 8.4 设基底序列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$满足条件：

(i) $\inf_n \|x_n\| > 0$,

(ii) $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 弱无条件收敛，

则基底序列$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 等价于 (C_0) 空间的单位基底。即

$\bigvee_{n=1}^{\infty}\{x_n\}$拓扑同构于$(C_0)$。

证明 令$\sum_{n=1}^{\infty} t_n x_n$ 收敛，须证明有$\sum_{n=1}^{\infty} t_n e_n \in (C_0)$，此处 $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 (C_0)空间的单位基底。

对任给的 $\varepsilon>0$，存在自然数N，使得$m>n>N$时，

$$K\left\|\sum_{i=n}^{m} t_i x_i\right\| \leqslant \varepsilon \inf_n \|x_n\|,$$

其中K如命题8.1中的常数。由命题8.1，

$$|t_n|\inf_n\|x_n\|\leqslant|t_n|\|x_n\|=\|t_nx_n\|$$
$$\leqslant K\|\sum_{j=n}^{m}t_jx_j\|\leqslant\varepsilon\inf_n\|x_n\|,$$

故当$n>N$时，$|t_n|\leqslant\varepsilon$，于是

$$\lim_{n\to\infty}t_n=0.$$

这样$\sum_{n=1}^{\infty}t_ne_n\in(C_0)$，其中$\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$是$(C_0)$的单位基底。

反之，若级数$\sum_{n=1}^{\infty}t_ne_n\in(C_0)$，则有$\lim_{n\to\infty}t_n=0$。由于$\sum_{n=1}^{\infty}x_n$是弱无条件收敛的，由命题8.2，$\sum_{n=1}^{\infty}t_nx_n$是收敛的，这样$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$与$\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$是等价的。因此$\bigvee_{n=1}^{\infty}\{x_n\}$拓扑同构于$(C_0)$。

命题 8.5 设基底序列$\{x_n^*\}_{n=1}^{\infty}$满足条件：

(i) $\inf_n\|x_n^*\|>0$,

(ii) $\sum_{n=1}^{\infty}x_n^*$是弱*无条件收敛，

则基底序列$\{x_n^*\}_{n=1}^{\infty}$与基底序列$\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$是等价的，因此$\bigvee_{n=1}^{\infty}\{x_n^*\}$拓扑同构于$(C_0)$。

命题 8.6 设X^*含有子空间拓扑同构于(C_0)，则X含有补子空间Y拓扑同构于(l)。

证明 令$\{f_n''\}_{n=1}^{\infty}\subseteq X^*$是等价于$(C_0)$的单位基底的基底序列，可认为

$$\|f_n''\|=1\quad(n=1,2,\cdots);$$
$$\|t_1f_1''+\cdots+t_nf_n''\|\leqslant K\sup_{1\leqslant j\leqslant n}|t_j|\quad(K\geqslant1). \tag{8.1}$$

因为$\{f_n''\}_{n=1}^{\infty}$等价于(C_0)之单位基底，由(C_0)单位基底

性质知，对$F\in\left[\bigvee_{n=1}^{\infty}\{f_n''\}\right]^*$，皆有$\sum_{n=1}^{\infty}|F(f_n'')|<+\infty$，特别

$$\sum_{n=1}^{\infty}|f_n''(x)|<+\infty,\ f_n''(x)\to 0,\ x\in X. \qquad (8.2)$$

选取 $f_1'=f_1''$，按(8.1)式知存在$\|y_1'\|=1$，使

$$|f_1'(y_1')-1|\leqslant 2^{-5}K^{-1}.$$

由于 $f_n''(x)\to 0$，可选取 f_2'，使

$$|f_2'(y_1')|\leqslant 2^{-1-6}K^{-1}.$$

再由(8.1)式知有$\|y_2'\|=1$，使

$$|f_2'(y_2')-1|\leqslant 2^{-5}K^{-1}.$$

由(8.2)式，可选取 f_3'，使

$$|f_3'(y_1')|\leqslant 2^{-2-6}K^{-1},\quad |f_3'(y_2')|\leqslant 2^{-2-6}K^{-1}.$$

由归纳法，可从 $\{f_n''\}_{n=1}^{\infty}$ 中选取子列 $\{f_n'\}_{n=1}^{\infty}$ 及$\{y_n'\}_{n=1}^{\infty}\subseteq X$，且$\|y_n'\|=1$，使对一切 n 有

$$\begin{aligned}&|f_n'(y_n')-1|\leqslant 2^{-5}K^{-1},\\&|f_{n+1}'(y_i')|\leqslant 2^{-n-6}K^{-1}(1\leqslant i\leqslant n).\end{aligned} \qquad (8.3)$$

注意 $\{f_n'(y_i')\}$ 是有界数集， 按对角线方法， 可选取子列 $f_n=f_{k_{2n}}'$，$y_n=y_{k_{2n}}'(n=1,2,\cdots)$。使对每个 i 皆有

$$|f_n(y_i)-f_n(y_{k_{2i-1}}')|\leqslant 2^{-n-5}K^{-1} \qquad (n\leqslant i-1).$$

另外由(8.3)式，

$$\begin{aligned}&|f_n(y_n)-1|\leqslant 2^{-5}K^{-1},\\&|f_{n+1}(y_i)|\leqslant 2^{-n-6}K^{-1}\ \ (i\leqslant n).\end{aligned}$$

令 $z_n=y_n-y_{k_{2n-1}}'(n=1,2,\cdots)$，由上式

$$|f_n(z_n)-1|\leqslant|f_n(y_n)-1|+|f_n(y_{k_{2n-1}}')|\leqslant 2^{-4}K^{-1}.$$

因此，对任意i

$$\sum_{n=1}^{\infty}|f_n(z_i)|\leqslant K^{-1}\sum_{n=1}^{\infty}2^{-n-5}\leqslant 2^{-4}K^{-1}.$$

从 z_n 的定义，$\|z_n\|\leqslant 2$ $(n=1,2,\cdots)$。再令

$$\varepsilon_n=\operatorname{sgn}f_n(z_n)\cdot\operatorname{sgn}t_n.$$

由(8.1)式及前两式有

$$\|t_1z_1+\cdots+t_qz_q\|\geqslant(\varepsilon_1f_1+\cdots+\varepsilon_qf_q)(t_1z_1+\cdots+t_qz_q)$$

$$\|\varepsilon_1f_1+\cdots+\varepsilon_qf_q\|^{-1}$$

$$\geqslant\|\varepsilon_1f_1+\cdots+\varepsilon_qf_q\|^{-1}\cdot\Big\{\sum_{i=1}^{q}|t_i|\cdot|f_i(z_i)|$$

$$-\sum_{i=1}^{q}\sum_{j=1}^{q}|f_i(z_j)||t_j|\Big\}.$$

$$\geqslant\Big\{\frac{1-2^{-4}K^{-1}}{K}-\frac{2^{-4}K^{-1}}{K}\Big\}\sum_{n=1}^{q}|t_n|$$

$$=(1-2^{-3}K^{-1})/K\sum_{n=1}^{q}|t_n|.$$

因此

$$\|t_1z_1+\cdots+t_qz_q\|\geqslant\frac{1}{2k}(|t_1|+\cdots+|t_q|).$$

另一方面，

$$\|t_1z_1+\cdots+t_pz_p\|\leqslant2(|t_1|+\cdots+|t_p|),$$

由上边两式可得

$$\frac{1}{2}\|t_1z_1+\cdots+t_pz_p\|\leqslant(|t_1|+\cdots+|t_p|)$$

$$\leqslant2K\|t_1z_1+\cdots+t_qz_q\|,\ p\leqslant q.$$

由命题8.1知$\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$是基底列且等价于(l)的单位基底，换言之，$\bigvee_{n=1}^{\infty}\{z_n\}$拓扑同构于$(l)$空间。

另外由此及(8.2)式，

$$Ux=\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x)z_n.$$

定义一个由X到$\bigvee_{n=1}^{\infty}\{z_n\}$上线性算子，设$x=\sum_{n=1}^{\infty}t_nz_n\in\bigvee_{n=1}^{\infty}\{z_n\}$;
由前述诸式，

$$\begin{aligned}
&\|Ux-x\| \\
&=\left\|\sum_{i=1}^{\infty}t_iz_i-\sum_{i=1}^{\infty}t_if_i(z_i)z_i-\sum_{i=1}^{\infty}t_i\sum_{i\neq n}f_n(z_i)z_n\right\| \\
&\leqslant 2K\|x\|(2^{-4}K^{-1}+2^{-4}K^{-1})\times 2 \\
&=\frac{1}{2}\|x\|.
\end{aligned}$$

因此算子$Ax=Ux$，$x\in\bigvee_{n=1}^{\infty}\{z_n\}$是从$\bigvee_{n=1}^{\infty}\{z_n\}$到自身的同构映射，令$P(x)=A^{-1}(Ux)$，它是从$X$到$\bigvee_{n=1}^{\infty}\{z_n\}$上的射影算子。所以$\bigvee_{n=1}^{\infty}\{z_n\}$是$X$的补子空间而且拓扑同构于$(l)$。

定理 8.1 设$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\subseteq X$，则$\sum_{n=1}^{\infty}x_n$是弱无条件收敛必有$\sum_{n=1}^{\infty}x_n$是无条件收敛的当且仅当$X$是$(OP)$型空间。

证明 必要性。若不然，X非(OP)型空间，于是X含有子空间拓扑同构于(C_0)，令此拓扑同构映射是T，而且，

$$x_n=Te_n\qquad(n=1,2,\cdots),$$

其中$\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$是(C_0)的单位基底。注意$\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$做成的级数$\sum_{n=1}^{\infty}e_n$在(C_0)是弱无条件收敛的，但不是无条件收敛的。因此由拓扑同构知，$\sum_{n=1}^{\infty}x_n$在X中亦是弱无条件收敛的，但不是无条件收敛的。矛盾。因此X是(OP)型空间。

充分性。否则，存在级数$\sum_{n=1}^{\infty}x_n$是弱无条件收敛，但不是无条件收敛的。因此对自然数列的某个重排$\{k_n\}_{n=1}^{\infty}$，级数$\sum_{n=1}^{\infty}x_{k_n}$是发散的。存在不减序列$\{q_n\}_{n=1}^{\infty}$，使得

$$\inf \| \sum_{i=q_n+1}^{q_{n+1}} x_{k_i} \| > 0.$$

我们令

$$y_n = \sum_{i=q_n+1}^{q_{n+1}} x_{k_i}$$

注意$\sum_{n=1}^{\infty} x_n$是弱无条件收敛的，故对任意$x^* \in X^*$,级数$\sum_{n=1}^{\infty} |x^*(x_n)| < \infty$. 可见$\sum_{n=1}^{\infty} x^*(y_n), x^* \in X^*$亦是无条件收敛的；而且由前证。

$$\inf_n \|y_n\| > 0.$$

据命题8.3，$\bigvee_{n=1}^{\infty} \{y_n\}$拓扑同构于$(C_0)$，矛盾.

命题 8.7 设$T \in \mathscr{B}(X)$是谱算子，则$T^* \in \mathscr{B}(X^*)$是X类准谱算子，

证明 令$E(\cdot)$是T的单位分解，显然$\{E(\sigma)^*\}_{\sigma \in \mathscr{B}}$仍是$\sigma$-Bool代数，这样$E^*(\cdot)$：$\mathscr{B} \to \mathscr{B}(X^*)$是一个同态写像：

(i) $E^*(\mathbb{C}) = [E(\mathbb{C})]^* = I$, $E^*(\phi) = [E(\phi)]^* = 0$;

(ii) $E^*(\cdot)$是有限可加的；

(iii) 对$x \in X$, $x^* \in X^*$, 数值测度对完整集$X \subseteq X^{**}$, $xE^*(\cdot)x^* = x^*E(\cdot)x$乃是可数可加的；

(iv) $$E^*(\sigma)T^* = [TE(\sigma)]^* = [E(\sigma)T]^*$$
$$= T^*E^*(\sigma), \sigma \in \mathscr{B}.$$

往证

(v) $\sigma(T^* | E^*(\sigma)X^*) \subseteq \bar{\sigma}$, $\sigma \in \mathscr{B}$.

注意

$$T^* | E^*(\sigma)X^* = T^*E^*(\sigma) | E^*(\sigma)X^*,$$

于是

$$\sigma(T^* | E^*(\sigma)X^*) = \sigma(T^*E^*(\sigma))$$

$$
\begin{aligned}
&= \sigma([E(\sigma)T]^*) \\
&= \sigma([TE(\sigma)]^*) \\
&= \sigma(TE(\sigma)) \\
&= \sigma(T|E(\sigma)X) \\
&\subseteq \bar{\sigma}, \qquad\qquad \sigma \in \mathscr{B},
\end{aligned}
$$

可见$T^* \in \mathscr{B}(X^*)$是X类准谱算子。证毕。

例 确有谱算子T，其共轭算子T^*是非谱算子的X类准谱算子。

考虑复(l)空间，向量$x_i = (\delta_{i1}, \delta_{i2}, \cdots)(i=1, 2, \cdots)$是$(l)$的无条件收敛基底，令

$$
Tx = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \xi_i x_i, \quad x = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i x_i \in (l).
$$

易验证T是谱算子，且$E\left(\left\{\frac{1}{2^n}\right\}\right)x = \xi_n x_n$，又有

$$
P_n x = \sum_{i=1}^{n} E\left(\left\{\frac{1}{2^i}\right\}\right)x = (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n, 0, \cdots).
$$

而对$y^* = (y_1, y_2, \cdots) \in (m)$，则

$$
P_n^* y^*(x) = y^*(P_n x) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i y_i = (y_1, \cdots, y_n, 0, \cdots)(x).
$$

于是

$$
P_n^* y^* = (y_1, y_2, \cdots, y_n, 0, \cdots) \in (m).
$$

若y_n不趋于0，则

$$
\|P_{n+1}^* y^* - P_n^* y^*\| = |y_{n+1}|
$$

亦不趋于零。这说明$\sum_{i=1}^{n} E^*\left(\left\{\frac{1}{2^n}\right\}\right)$不强收敛，因此$T^*$不是谱算子。

定理 8.2 设$\{x_n^*\}_{n=1}^{\infty} \subseteq X^*$，则$\sum_{n=1}^{\infty} x_n^*$是弱*无条件收敛必有$\sum_{n=1}^{\infty} x_n^*$是无条件收敛的当且仅当$X^*$是$(OP)$型空间。

证明 必要性. 若不然, X^*是非(OP)型空间. 于是X^*含有子空间拓扑同构于 (C_0), 由命题8.6, X含有子空间拓扑同构于(l), 此因X^*含有子空间拓扑同构于(m). 令此拓扑同构映射为T, 且

$$x_n^* = Te_n \qquad (n = 1,2,\cdots).$$

其中$\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$是(m)的单位基底. 注意$\sum_{n=1}^{\infty} e_n$在(m)中是弱*无条件收敛的, 但不是无条件收敛的. 因此$\{x_n^*\}_{n=1}^{\infty}$在X^*中亦是弱*无条件收敛的, 但不是无条件收敛的. 矛盾. 故X^*是(OP)型空间.

至于充分性的证明, 与定理8.1的充分性证明完全类似.

定理 8.3 设$T \in \mathscr{B}(X)$, 则X上的每个谱算子T之共轭算子T^*皆是X^*上的谱算子当且仅当X^*为(OP)型空间.

证明 充分性. 由命题8.7, T^*总是X^*上的X类准谱算子. 我们令$E^*(\cdot)$是T^*的X类单位分解, $\{\sigma_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathscr{B}$是互不相交的, 且$\sigma = \bigcup_{n=1}^{\infty} \sigma_n$.

对于$x \in X$, $x^* \in X^*$, 由于$E^*(\cdot)$是X可数可加的, 级数$\sum_{n=1}^{\infty} xE^*(\sigma_n)x^*$收敛, 而且

$$\sum_{n=1}^{\infty} xE^*(\sigma_n)x^* = xE^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \sigma_n\right)x^* = xE^*(\sigma)x^*.$$

可见$\sum_{n=1}^{\infty} E^*(\sigma_n)x^*$是弱*无条件收敛的, 而$X^*$是$(OP)$型空间. 由定理8.2, 可以知道, 级数$\sum_{n=1}^{\infty} E^*(\sigma_n)x^*$是无条件收敛的. 令

$$y^* = \sum_{n=1}^{\infty} E^*(\sigma_n)x^*.$$

对 $x\in X\subseteq X^{**}$，

$$x(y^*)=\sum_{n=1}^{\infty}xE^*(\sigma_n)x^*=xE^*(\sigma)x^*.$$

由 $X\subseteq X^{**}$ 的完整性，

$$y^*=E^*(\sigma)x^*,$$

因此

$$\sum_{n=1}^{\infty}E^*(\sigma_n)x^*=E^*(\sigma)x^*,\quad x^*\in X^*,$$

从而 $E^*(\cdot)$是可数可加的，T^* 是谱算子.

必要性. 否则X^*含有子空间拓扑同构于(C_0)，据命题8.5，X 含有补子空间Y 及Y 上射影算子 P，使 $Y=PX$ 拓扑同构于(l). 由例子不难证明，存在$PX=Y$上的谱算子T_1，其单位分解为 $E_1(\cdot)$，并有$\mathscr{B}$中互不相交的 $\{\sigma_n\}_{n=1}^{\infty}$ 及 $y_0^*\in Y^*$，使得 $\|E_1^*(\sigma_n)y_0^*\|$不趋于零. 令 $Q=I-P$，$Z=QX$，又令 Z 上单位算子的单位分解是 $E_2(\cdot)$. 我们令

$$\tilde{E}_1(\sigma)x=\begin{cases}E_1(\sigma)x, & \text{当 } x\in Y,\\ 0, & \text{当 } x\in Z,\end{cases}\quad \sigma\in\mathscr{B};$$

$$\tilde{E}_2(\sigma)x=\begin{cases}E_2(\sigma)x, & \text{当 } x\in Z,\\ 0, & \text{当 } x\in Y,\end{cases}\quad \sigma\in\mathscr{B}.$$

容易证明 $\tilde{E}(\sigma)=\tilde{E}_1(\sigma)P+\tilde{E}_2(\sigma)Q$，$\sigma\in\mathscr{B}$ 是谱算子 $\tilde{T}=T_1P+Q$ 的单位分解. 显然

$$\tilde{E}(\sigma)^*=(\tilde{E}_1(\sigma)P)^*+(\tilde{E}_2(\sigma)Q)^*,\quad \sigma\in\mathscr{B}.$$

令 $x_0^*(x)=y_0^*(Px)$，则

$$(\tilde{E}_2(\sigma)Q)^*x_0^*(x)=x_0^*(\tilde{E}_2(\sigma)Q(x))=y_0^*(P\tilde{E}_2(\sigma)Qx)=0.$$

因此

$$\begin{aligned}\tilde{E}(\sigma)^*x_0^*(x)&=(\tilde{E}_1(\sigma)P)^*x_0^*(x)\\&=x_0^*(\tilde{E}_1(\sigma)Px)\\&=y_0^*(P\tilde{E}_1(\sigma)Px)\\&=y_0^*(E_1(\sigma)Px).\end{aligned}$$

我们有$\|\tilde{E}(\sigma_n)^* x_0^*\|\to 0$。否则，由上式

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{\|x\|\leqslant 1}|y_0^*(E_1(\sigma)Px)|=0,$$

从而

$$\|E_1^*(\sigma_n)y_0^*\|=\sup_{\|y\|\leqslant 1}|y_0^*(E_1(\sigma_n)y)|$$

$$\leqslant \sup_{\|x\|\leqslant 1}|y_0^*(E_1(\sigma_n)Px)|\to 0\,(n\to\infty).$$

这与前知矛盾，因此$\{\tilde{E}^*(\sigma)\}_{\sigma\in\mathscr{B}}$不能是谱算子$T^*$的单位分解.

最后，令

$$T=\int_{\sigma(T)}\lambda E(d\lambda)+N,\quad 则T^*=\int_{\sigma(T^*)}\lambda E^*(d\lambda)+N^*,$$

$E^*(\cdot)$是X类准谱算子T^*的单位分解。若T^*是谱算子，则

$$T^*=\int_{\sigma(T^*)}\lambda F(d\lambda)+Q_1,$$

其中Q_1是拟幂零算子，$\int_{\sigma(T^*)}\lambda F(d\lambda)$是相应的标部。既然$E^*(\cdot)$是$T^*$的一个单位分解，因此必有

$$E^*(\sigma)T^*=T^*E^*(\sigma),\quad \sigma\in\mathscr{B}.$$

从而

$$E^*(\sigma)F(\sigma)=F(\sigma)E^*(\sigma),\quad \sigma\in\mathscr{B}.$$

于是

$$E^*(\sigma)X^*=\overline{X_{T^*}^*(\sigma)},\quad F(\sigma)X^*=\overline{X_{T^*}^*(\sigma)},\quad \sigma\in\mathscr{B}.$$

所以

$$E^*(\sigma)F(\sigma)=F(\sigma),\quad F(\sigma)E^*(\sigma)=E^*(\sigma),\quad \sigma\in\mathscr{B}.$$

故$E^*(\sigma)=F(\sigma)$，$\sigma\in\mathscr{B}$。这就证明T^*之单位分解必是$\tilde{E}^*(\sigma)$，与前结论矛盾，

定理8.4 设$T\in\mathscr{B}(X)$是谱算子，$E(\cdot)$是其单位分解，则T^*是谱算子当且仅当对于不相交的$\{\sigma_n\}_{n=1}^{\infty}\subseteq\mathscr{B}$，

$$\bigvee_{n=1}^{\infty}\{E^*(\sigma_n)X^*\}=\bigvee_{n=1}^{\infty}\overline{X^*_{T^*}(\sigma_n)}$$

是弱* 闭的。

证明 设 T^* 是谱算子，由定理 8.3，$E^*(\cdot)$ 是它的谱测度且强可数可加，对不相交的 $\{\sigma_n\}_{n=1}^{\infty}\subseteq\mathscr{B}$，有

$$\bigvee_{n=1}^{\infty}E^*(\sigma_n)X^*=E^*(\sigma)X^*=(E(\sigma)X)^*=[(I-E(\sigma)X]^{\perp}$$

是弱*闭的，其中 $\sigma=\bigcup_{n=1}^{\infty}\sigma_n$。

充分性。设 $M=\bigvee_{n=1}^{\infty}E^*(\sigma_n)X^*$ 是弱*闭的，其中 $\{\sigma_n\}_{n=1}^{\infty}\subseteq\mathscr{B}$ 不相交。于是

$$M=E^*(\sigma)X^*.$$

事实上，对 $x^*\in X^*$，$E^*(\cdot)x^*$ 弱*可数可加，$E^*(\sigma)X^*$ 是 M 的弱*闭包。因为

$$E^*(\sigma)x^*\in\bigvee_{n=1}^{\infty}E^*(\sigma_n)X^*,\quad x^*\in X^*.$$

所以存在

$$\sum_{i=1}^{m_k}E^*(\sigma_{n_{k_i}})x_i^*\to E^*(\sigma)X^*\quad(k\to\infty).$$

于是，对 $\varepsilon>0$，存在 k，使

$$\left\|\sum_{i=1}^{m_k}E^*(\sigma_{n_{k_i}})x_i^*-E^*(\sigma)x^*\right\|<\frac{\varepsilon}{2C},$$

其中 $C=\sup_{\sigma\in\mathscr{B}}\|E(\sigma)\|$。则当 $m\geqslant n_{k,m_k}$ 时，

$$\left\|\sum_{i=1}^{m_k}E^*(\sigma_{n_{k_i}})x_k^*-\sum_{i=1}^{\infty}E^*(\sigma)_i x^*\right\|$$

$$=\left\|E^*\left(\bigcup_{i=1}^{m}\sigma_i\right)\left[\sum_{i=1}^{m_k}E^*(\sigma_{n_{k_i}})x_i^*-E^*(\sigma)x^*\right]\right\|$$

$$<\frac{\varepsilon}{2}$$

所以，当 $n>m\geqslant n_{km_k}$时，

$$\left\|\sum_{i=m}^{n}E^*(\sigma_i)x^*\right\|<\varepsilon.$$

$\sum_{i=1}^{n}E^*(\sigma_i)x^*$ 是强收敛的，又它弱* 收敛于 $E^*(\sigma)x^*$，由弱* 极限的唯一性，

$$\sum_{n=1}^{\infty}E^*(\sigma_n)x^*=E^*(\sigma)x^*,\quad x^*\in X^*.$$

即 $E^*(\cdot)$强可数可加，故 T^* 是谱算子。

§9 谱算子的限制算子与商算子

定理 9.1 设 $T\in\mathscr{B}(X)$是 Γ 类准谱算子，$Y\in \operatorname{Lat} T$，$E(\cdot)$是 T 的 Γ 类单位分解，则 $T_Y\in\mathscr{B}(Y)$ 是 Γ 类准谱算子当且仅当 $E(\sigma)Y\subseteq Y$，$\sigma\in\mathscr{B}$，此时 $E_{T_Y}(\sigma)=E_Y(\sigma),\sigma\in\mathscr{B}$，其中 $E_{T_Y}(\cdot)$是 T_Y 的 Γ 类单位分解；$E_Y(\sigma)=E(\sigma)|Y,\sigma\in\mathscr{B}$.

证明 必要性．由 T_Y 是 Γ 类准谱算子，据定理 3.3，对 $\sigma\in\mathscr{F}\subseteq\mathscr{B}$，

$$E_{T_Y}(\sigma)Y=Y_{T_Y}(\sigma)\subseteq Y\cap X_T(\sigma)\subseteq X_T(\sigma)=E(\sigma)X.$$

所以

$$E(\sigma)E_{T_Y}(\sigma)y=E_{T_Y}(\sigma)y,\quad y\in Y.$$

对于 $\sigma_n\in\mathscr{F},\sigma_n\uparrow\sigma^c$，$\sigma^c=\bigcup_{n=1}^{\infty}\sigma_n$，由$E(\cdot),E_{T_Y}(\cdot)$ 的 Γ 可数可加性及 Γ 的完整性可知

$$E(\sigma^c)E_{T_Y}(\sigma^c)y=E_{T_Y}(\sigma^c)\cdot y,\qquad y\in Y.$$

又

$$E_{T_Y}(\sigma_n)Y = Y_{T_Y}(\sigma_n) \subseteq X_T(\sigma_n) \subseteq X_T(\sigma^c).$$

于是

$$E(\sigma)E_{T_Y}(\sigma_n)y = 0, \qquad y \in Y,$$
$$E(\sigma)E_{T_Y}(\sigma)y = E_{T_Y}(\sigma)y, \qquad y \in Y.$$

因此

$$E(\sigma)E_{T_Y}(\sigma^c)y = 0, \qquad y \in Y.$$

这样，对 $\forall\ y \in Y$，

$$\begin{aligned}E(\sigma)y &= E(\sigma)[E_{T_Y}(\sigma)y + E_{T_Y}(\sigma^c)y] \\ &= E(\sigma)E_{T_Y}(\sigma)y + E(\sigma)E_{T_Y}(\sigma^c)y \\ &= E(\sigma)E_{T_Y}(\sigma)y \\ &= E_{T_Y}(\sigma)y, \qquad \sigma \in \mathscr{F}.\end{aligned}$$

再由 $E_{T_Y}(\cdot)$，$E(\cdot)$的Γ可数可加性，

$$E_{T_Y}(\sigma) = E(\sigma)|Y = E_Y(\sigma), \ \sigma \in \mathscr{B}.$$

且

$$E(\sigma)Y \subseteq Y, \ \sigma \in \mathscr{B}.$$

充分性。若 $E(\sigma)Y \subseteq Y$；$\sigma \in \mathscr{B}$，令 $E_{T_Y}(\sigma) = E(\sigma)|Y = E_Y(\sigma)$，$\sigma \in \mathscr{B}$，只须证明 $E_{T_Y}(\cdot)$是 T_Y 的Γ类单位分解。不难看出这只须证明

$$\sigma(T_Y|E_{T_Y}(\sigma)Y) \subseteq \bar{\sigma}, \ \sigma \in \mathscr{B}.$$

注意，$T|E(\sigma)Y$，$T|E(\sigma)X$ 具有性质(A)，我们先证等式 $\sigma_{T|E(\sigma)X}(x) = \sigma_T(x)$，$x \in E(\sigma)X$ 及 $\sigma_{T|E(\sigma)Y}(x) = \sigma_T(x)$，$x \in E(\sigma)Y$。只须证明第一式。显然，$\sigma_T(x) \subseteq \sigma_{T|E(\sigma)X}(x)$，$x \in E(\sigma)X$。反之，令$\lambda \in \rho_T(x)$，对 x 之最大解析扩张$\tilde{x}(\lambda)$，有

$$(\lambda I - T)\tilde{x}(\lambda) = x, \ \lambda \in \rho_T(x).$$

所以

$$E(\sigma)(\lambda I - T)\tilde{x}(\lambda) = E(\sigma)x = x,$$

对 $\lambda \in \rho_T(x)$，

$$E(\sigma)(\lambda I - T)\tilde{x}(\lambda) = (\lambda I - T|E(\sigma))E(\sigma)\tilde{x}(\lambda) = x.$$

注意 $E(\sigma)\tilde{x}(\lambda)$是定义于 $\rho_T(x)$取值于 $E(\sigma)X$ 的解析函数，故 $\lambda\in\rho_{T|E(\sigma)X}(x)$. 因此

$$\rho_T(x)\subseteq\rho_{T|E(\sigma)X}(x),\ \text{或}\ \sigma_{T|E(\sigma)X}(x)\subseteq\sigma_T(x),$$

故 $\sigma_T(x)=\sigma_{T|E(\sigma)X}(x)$，$x\in E(\sigma)X$. 又由第一章定理 2.2，对于 $\sigma\in\mathscr{B}$有

$$\begin{aligned}\sigma(T_Y|E_{T_Y}(\sigma)Y&=\sigma(T|E(\sigma)Y)\\&=\bigcup_{x\in E(\sigma)Y}\sigma_{T|E(\sigma)Y}(x)\\&=\bigcup_{x\in E(\sigma)Y}\sigma_T(x)\\&\subseteq\bigcup_{x\in E(\sigma)X}\sigma_{T|E(\sigma)X}(x)\\&=\sigma(T|E(\sigma)X)\\&\subseteq\bar{\sigma}.\end{aligned}$$

定理 9.2 设 $T\in\mathscr{B}(X)$是谱算子,$Y\in\mathrm{Lat}\,T$，$E(\cdot)$是 T 的单位分解，则$T^Y\in\mathscr{B}(X/Y)$是谱算子当且仅当$E(\sigma)Y\subseteq Y$，$\sigma\in\mathscr{B}$，而且此时，$E_{T^Y}(\sigma)=E^Y(\sigma)$，$\sigma\in\mathscr{B}$，其中$E_{T^Y}(\cdot)$是 T^Y 的单位分解，$E^Y(\sigma)$ 表示 $E(\sigma)$在 X/Y 上诱导算子.

证明 必要性. 注意 T^* 是 X 类准谱算子，$E^*(\cdot)$是T^*的单位分解，由 Dieudonné 对偶定理，$(X/Y)^*$ 等距同构于 $Y^\perp$，于是$(T^Y)^*$ 与 $T^*_{Y^\perp}$ 等价. 据定理9.1，$T^*_{Y^\perp}$ 是 X 类准谱算子，且有 X 类单位分解 $E^*_{T^*{}_{Y^\perp}}(\sigma)=E^*_{Y^\perp}(\sigma)=E^*(\sigma)|Y^\perp$，$\sigma\in\mathscr{B}$. 于是对于 $x\in X$，$y^*\in Y^\perp$，

$$\langle x,\ E(\sigma)y^*\rangle=\langle x,E^*_{T^*_Y{}^\perp}(\sigma)y^*\rangle,\ \sigma\in\mathscr{B}.$$

从而对 $y\in Y$，$y^*\in Y^\perp$，

$$\begin{aligned}\langle E(\sigma)y,y^*\rangle&=\langle y,E^*(\sigma)y^*\rangle\\&=\langle y,E^*_{T^*{}_{Y^\perp}}(\sigma)y^*\rangle=0.\end{aligned}$$

故 $E(\sigma)y\in Y$，即 $E(\sigma)Y\subseteq Y$，$\sigma\in\mathscr{B}$.

充分性. 设 $E(\sigma)Y\subseteq Y$，$\sigma\in\mathscr{B}$. 令 $E_{T^Y}(\sigma)=E^Y(\sigma)$，

$\sigma\in\mathscr{B}$. $E_{T^Y}(\cdot)$ 的可数可加性可从 $E(\cdot)$ 的可数可加性得到，故只须证明

$$\sigma(T^Y|E_{T^Y}(\sigma)X/Y)\subseteq\bar{\sigma},\ \sigma\in\mathscr{B}.$$

由于 T^* 是 X 类准谱算子，T^* 有性质 (A)，据第一章命题 1.2,

$$\sigma_a(T)=\sigma(T).$$

T_Y 是谱算子，故 T_Y^*是 Y 类准谱算子，所以 T_Y^* 有性质(A). 同理

$$\sigma_a(T_Y)=\sigma(T_Y).$$

显然

$$\sigma_a(T_Y)\subseteq\sigma_a(T).$$

所以 $\sigma(T_Y)\subseteq(T)$. 由第三章命题 2.1,

$$\sigma(T^Y)\subseteq\sigma(T_Y)\cup\sigma(T).$$

于是

$$\sigma(T^Y)\subseteq\sigma(T),\ \sigma(T_Y)\subseteq\sigma(T).$$

这样对 $E(\sigma)X$ 来讲,

$$\begin{aligned}\sigma(T^Y|E_{T^Y}(\sigma)X/Y)&=\sigma([T|E(\sigma)X]^{E(\sigma)Y})\\&\subseteq\sigma(T|E(\sigma)X)\subseteq\bar{\sigma},\ \sigma\in\mathscr{B}.\end{aligned}$$

所以 $T^Y\in\mathscr{B}(X/Y)$亦是谱算子.

推论 设 $T\in\mathscr{B}(X)$是谱算子，$Y\in\mathrm{Lat}\,T$, $E(\cdot)$ 是 T 的单位分解，则 $T_Y\in\mathscr{B}(Y)$是谱算子当仅且当 $T^Y\in\mathscr{B}(X/Y)$是谱算子.

§10 谱算子与可分解算子

我们首先讨论在 Hilbert 空间H上的可分解算子何时为谱算子，然后再讨论在(OP)型空间上的相应问题.

定义10.1 设$T\in\mathscr{B}$(H) 是可分解算子，称T有性质(P)，若对 $\sigma\in\mathscr{F}$，皆有

$$\sigma_T(P_\sigma x)\subseteq\sigma_T(x),\quad \forall x\in H.$$

这里 P_σ 表从 H 到 $H_T(\sigma)$ 上的直交射影。

命题10.1 设 $T\in\mathscr{B}(H)$ 是具有性质 (P) 的可分解算子，则从 $\sigma_T(x)\cap\sigma_T(y)=\phi$，必有 $(x,y)=0$。

证明 令 $\sigma_T(x)=\sigma_1,\sigma_T(y)=\sigma_2$. 由定义 10.1, $\sigma_T(P_{\sigma_2}x)\subseteq\sigma_T(x)=\sigma_1$，但是 $P_{\sigma_2}x\in H_T(\sigma_2)$，因此, $\sigma_T(P_{\sigma_2}x)\subseteq\sigma_2$，于是

$$\sigma_T(P_{\sigma_2}x)\subseteq\sigma_1\cap\sigma_2=\phi.$$

这样

$$P_{\sigma_2}x=0,\quad (x,y)=0.$$

命题10.2 设 $T\in\mathscr{B}(H)$ 是有性质 (P) 的可分解算子，则

$$H_T(\sigma)^\perp=\overline{H_T(\sigma^c)},\quad \sigma\in\mathscr{F}.$$

证明 首先证明对包含 σ 的任意开集 G, $H_T(\bar{G})^\perp\subseteq H_T(\sigma^c)$，由于 $\{G,\sigma^c\}$ 复盖 $\sigma(T)$，所以存在 T 的谱极大空间 Z_1 与 Z_2，使得 $H=Z_1+Z_2$，且 $\sigma(T|Z_1)\subseteq G\cap\sigma(T)$, $\sigma(T|Z_2)\subseteq\sigma^c\cap\sigma(T)$. 令 $x\in H_T(\bar{G})^\perp$, 且 $x=z_1+z_2, z_i\in Z_i(i=1,2)$. 由于 $z\subseteq H_T(\bar{G})$，于是

$$0=P_Gx=z_1+P_Gz_2.$$

据性质 (P),

$$\sigma_T(z_1)=\sigma_T(P_Gz_2)\subseteq\bar{G}\cap\sigma_T(z_2)\subseteq\bar{G}\cup\sigma^c,$$

因此

$$\sigma_T(x)\subseteq\sigma_T(z_1)\cup\sigma_T(z_2)\subseteq\sigma^c,$$

从而 $H_T(\sigma^c)^\perp\subseteq H_T(\bar{G})$. $G\supset\sigma$ 是任意的，注意 $H_T(\sigma)=\bigcap\limits_{G\supset\sigma}H_T(\bar{G})$，因而

$$H_T(\sigma^c)^\perp\subseteq H_T(\sigma),\quad H_T(\sigma)^\perp\subseteq\overline{H_T(\sigma^c)}.$$

由命题 10.1.

$$\overline{H_T(\sigma^c)}\subseteq H_T(\sigma^c)^\perp.$$

所以

$$H_T(\sigma)^{\perp} = \overline{H_T(\sigma^c)}, \quad \sigma \in \mathscr{F}.$$

定理10.1 设$T \in \mathscr{B}(H)$是有性质(P)的可分解算子，则$T = S + N$,此处S是正规算子,N是拟幂零算子,且$SN = NS$。

证明 因为T是可分解算子，由第三章定理1.2，T是(AC)算子。

对任意$\sigma \in \mathscr{B}$,若$x \in \overline{H_T(\sigma)}$,$y \in \overline{H_T(\sigma^c)}$,则$x = \lim\limits_{n \to \infty} x_n$,$y = \lim\limits_{n \to \infty} y_n$，$x_n \in H_T(\sigma)$，$y_n \in H_T(\sigma^c)$ $(n = 1, 2, \cdots)$。于是$\sigma_T(x_n) \subseteq \sigma$，$\sigma_T(y_n) \subseteq \sigma^c$，因此，$\sigma_T(x_n) \cap \sigma_T(y_n) = \phi$。由命题10.1，$(x_n, y_n) = 0$，从而$(x, y) = 0$。以$P_\sigma$表示从$H$到$\overline{H_T(\sigma)}$上的直交射影算子，则

$$\|P_\sigma\| \leqslant 1, \quad \sigma \in \mathscr{B}.$$

对于$x \in H_T(\sigma)$,$y \in H_T(\sigma^c)$,我们有$P_\sigma x = x$，$P_\sigma y = 0$。因此

$$\|x\| = \|P_\sigma x\| = \|P_\sigma(x + y)\| \leqslant \|x + y\|,$$

故T具有性质$(B_{\mathscr{B}})$。

由命题10.2，对任意$\sigma \in \mathscr{F}$，$\sigma \in \Sigma_3 \subseteq \Sigma$。$\Sigma$是$\sigma$-Bool代数，这样$\Sigma = \mathscr{B}$。据定理3.4，$T$是谱算子。由命题3.3，$T$的单位分解是唯一的。故上述直交射影$P_\sigma(\cdot)$，$\sigma \in \mathscr{B}$便是$T$的单位分解。由定理5.1，

$$T = S + N, \quad SN = NS,$$

而且N是拟幂零算子。又

$$S = \int_{\sigma(T)} \lambda P_{d\lambda},$$

P_σ是自伴射影，故S是正规算子。

显然我们还有下述命题：

命题10.3 设$T \in \mathscr{B}(X)$是Γ类准谱算子，则T是可分解算子。

证明 由定理3.2与定理3.3，T是(AC)算子，且对$\sigma \in \mathscr{F}$，

$$E(\sigma)X = X_T(\sigma)$$

是 T 的谱极大空间·令 $\{G_i\}_{i=1}^n$ 是 $\sigma(T)$ 的有限开复盖，做连续函数 $\{\varphi_i\}_{i=1}^n$，使得

(i) $\sum_{i=1}^n \varphi_i(\lambda) = 1$，$\lambda \in \sigma(T)$，

(ii) $\sigma_i = \operatorname{supp} \varphi_i \subseteq G_i$， $(i = 1,2,\cdots,n)$.

从函数演算，我们令

$$x_i = \int_{\sigma(T)} \varphi_i(\lambda) E(d\lambda) x \qquad (i = 1,2,\cdots,n).$$

不难看出 $x_i \in E(\sigma_i)X$，且 $x = \sum_{i=1}^n x_i$. 令 $Y_i = E(\sigma_i)X$ $(i = 1,2,\cdots,n)$，它是 T 的谱极大空间，且

$$X = \sum_{i=1}^n Y_i,\ \sigma(T|Y_i) \subseteq \sigma_i \subseteq G_i\,(i = 1,2,\cdots,n).$$

故 T 是可分解算子。证毕。

注意到 H 上谱算子 $T = S + N$，S 是正规算子，亦有性质 (P)，因此由命题10.3可证明：

定理 10.2 设 $T \in \mathscr{B}(H)$，则 $T = S + N$，S 是正规算子，N 是拟幂零算子，且 $SN = NS$，当且仅当 T 是具有性质 (P) 的可分解算子。

定义 10.2 设 $T \in \mathscr{B}(X)$ 是可分解算子，称 T 具有性质 (J)，若对任意 $\sigma \in \mathscr{F}$，皆存在从 X 到 $X_T(\sigma)$ 上的射影算子 P_σ，使得 $\|P_\sigma\| \leqslant K$，且

$$\sigma_T(P_\sigma x) \subseteq \sigma_T(x),\ x \in X,$$

此处 K 是与 σ 无关的常数.

显然，对Hilbert空间而言，若 T 有性质 (P)，则它必有性质 (J).

命题 10.4 设 $T \in \mathscr{B}(X)$ 是有性质 (J) 的可分解算子，若 $\sigma_T(x) \cap \sigma_T(y) = \phi$，则有

$$\|x\|\leqslant K\|x+y\|.$$

证明 令$\sigma_T(x)=\sigma_1, \sigma_T(y)=\sigma_2$，由性质$(J)$，在$X_T(\sigma_1)$上有射影算子$P_{\sigma_1}$，使得

$$\sigma_T(P_{\sigma_1}y)\subseteq\sigma_T(y)\subseteq\sigma_2.$$

于是

$$\sigma_T(P_{\sigma_1}y)\subseteq\sigma_1\cap\sigma_2=\phi.$$

故 $P_{\sigma_1}y=0$。又 $x\in X_T(\sigma_1)$，则 $P_{\sigma_1}x=x$，从而

$$\|x\|=\|P_{\sigma_1}x+P_{\sigma_1}y\|\leqslant\|P_{\sigma_1}\|\|x+y\|\leqslant K\|x+y\|.$$

命题10.5 X上任何有界的射影算子Bool代数$\mathscr{U}$皆可嵌入$\mathscr{U}$之强闭包中一个σ-Bool代数中当且仅当X是(OP)型空间。

证明 先证充分性。令

$$\|P\|\leqslant K,\ \forall P\in\mathscr{U}.$$

令$\{E_n\}_{n=1}^{\infty}\subseteq\mathscr{U}$，$P_n=\bigvee\limits_{i=1}^{n}E_i-\bigvee\limits_{i=1}^{n-1}E_i$，当$n>1$；$P_1=E_1$。

则$P_n\in\mathscr{U}$，且$P_nP_m=0$，当$n\neq m$。

$$\left(\sum_{i=1}^{n}P_i\right)X=\bigvee_{i=1}^{n}\{E_iX\},\left(I-\sum_{i=1}^{n}P_i\right)X=\bigcup_{i=1}^{n}(I-E_i)X.$$

据$\mathscr{U}$的有界性，如定理8.2之证明便知，对任何$x\in X, x^*\in X^*$，级数$\sum\limits_{i=1}^{\infty}x^*P_ix$皆无条件收敛。又$X$是$(OP)$型的，$\sum\limits_{i=1}^{\infty}P_ix$收敛于$Ex$。显然$E$是有界射影算子，而且

$$\|E\|\leqslant K,\ EX=\bigvee_{i=1}^{\infty}E_iX,\ (I-E)X=\bigcup_{i=1}^{\infty}(I-E_i)X,$$

即$E=\bigvee\limits_{i=1}^{\infty}E_i$。若$E$不在$\mathscr{U}$中，则添$E$到$\mathscr{U}$，把$\mathscr{U}$扩张成Bool代数$\widetilde{\mathscr{U}}$，使$\widetilde{\mathscr{U}}$构成$\sigma$-Bool代数，一切这种$\widetilde{\mathscr{U}}$做成类. 对$\widetilde{\mathscr{U}}_1$，$\widetilde{\mathscr{U}}_2$，若$\widetilde{\mathscr{U}}_1$之一列元上界皆在$\widetilde{\mathscr{U}}_2$中，则称$\widetilde{\mathscr{U}}_1\leqslant\widetilde{\mathscr{U}}_2$，一切如此$\widetilde{\mathscr{U}}$构成部分序类。设$\{\widetilde{\mathscr{U}}_\alpha,\ \alpha\in A\}$是全序子类。显然，

$\bigcup_{\alpha \in A} \widetilde{\mathscr{U}}_\alpha$ 便是其上界．按 Zorn 引理，此类有极大元，它是σ-完全的．

必要性．若不然，X 含有子空间M拓扑同构于(C_0)，令此拓扑同构为T，$\beta_i(y)$为(C_0)中元y之第i个坐标泛函，我们将M上的线性泛函$\beta_i(Tx)$保范扩张成X上的线性泛函$f_i(x)$．取M中元b_i，使得

$$Tb_i = e_i = (\delta_{i1},\ \delta_{i2},\cdots),$$

则 $f_i(b_j) = \delta_{ij}$．

注意 $\{e_i\}_{i=1}^\infty$ 是(C_0)中的条件收敛基，存在 $y_0 \in (C_0)$及$\{e_i\}_{i=1}^\infty$ 的重排 $\{e_{\pi(i)}\}_{i=1}^\infty$，使

$$y_0 = \sum_{i=1}^\infty \beta_i(y_0)e_i,$$

但是

$$\sum_{i=1}^\infty \beta_{\pi(i)}(y_0)e_{\pi(i)}$$

发散．对有限个自然数的集合σ，令

$$P_\sigma x = \sum_{i\in\sigma} f_{\pi(i)}(x)b_{\pi(i)},\quad x \in M,$$

则 P_σ 是射影算子，且 $P_\sigma P_\delta = P_{\sigma\cap\delta}$，注意

$$\|TP_\sigma x\|_{(C_0)} = \|\sum_{i\in\sigma} f_{\pi(i)}(x)\,e_{\pi(i)}\|_{(C_0)}$$

$$= \sup_{i\in\sigma}|f_{\pi(i)}(x)| \leqslant \|T\|\|x\|.$$

因此

$$\|P_\sigma x\| = \|T^{-1}TP_\sigma x\| \leqslant \|T^{-1}\|\|TP_\sigma x\| \leqslant \|T^{-1}\|\|T\|\|x\|.$$

令$K = 1 + \|T^-\|\,\|T\|$，设由一切P_σ及$I-P_\sigma$构成的 Bool 代数为$\mathscr{U}$，显然$\mathscr{U}$中任何元之范数皆不大于K．再令

$$E_n = P_{\sigma_n},\quad \sigma_n = \{\pi(1),\cdots,\pi(n)\}.$$

取 $x_0 \in M$，使 $y_0 = Tx_0$．

$$E_n x_0 = T^{-1}(TE_n x_0) = T^{-1}\sum_{i=1}^n f_{\pi(i)}(x_0)e_{\pi(i)}$$

$$= T^{-1}\sum_{i=1}^{n}\beta_{\pi(i)}(Tx_0)e_{\pi(i)}$$

$$= T^{-1}\sum_{i=1}^{n}\beta_{\pi(i)}(y_0)e_{\pi(i)}.$$

但右端在 $n\to\infty$ 时，不存在。于是 $\bigvee_{n=1}^{\infty}E_n$ 便不存在，说明 $\mathscr{U}$ 不能嵌入任何 σ-bool 代数中。证毕。

命题10.6 设 X 是 (OP) 型空间，$T\in\mathscr{B}(X)$ 是有性质 (J) 的可分解算子，则对任意 $\sigma\in\mathscr{F}$。

$$X_T(\sigma)=\overline{X_T(\sigma^c)}=X.$$

证明 令开集 $G\supseteq\sigma$，$\{G,\sigma^c\}$ 构成 $\sigma(T)$ 之开复盖。存在 T 之谱极大空间 Z_1,Z_2，使得 $X=Z_1+Z_2$，且 $\sigma(T|Z_1)\subseteq G$，$\sigma(T|Z_2)\subseteq\sigma^c$。设 $P_{\bar{G}}z=0$，$z=z_1+z_2$，$z_i\in Z_i\ (i=1,2)$。由于 $z_1\in Z_1\subseteq X_T(\bar{G})$，故

$$P_{\bar{G}}z=P_{\bar{G}}(z_1+z_2)=z_1+P_{\bar{G}}z_2,$$

即 $P_Gz_2=-z_1$。由性质 (J)，

$$\sigma_T(z_1)=\sigma_T(P_{\bar{G}}z_2)\subseteq\sigma_T(z_2),$$

于是

$$\sigma_T(z)\subseteq\sigma_T(z_1)\cup\sigma_T(z_2)\subseteq\sigma_T(z_2)\subseteq\sigma^c,$$

故 $z\in X_T(\sigma^c)$。从而

$$(I-P_{\bar{G}})X\subseteq X_T(\sigma^c).$$

这样，

$$X=P_{\bar{G}}X+(I-P_{\bar{G}})X\subseteq X_T(\bar{G})+\overline{X_T(\sigma^c)}.$$

因此

$$X=X_T(\bar{G})+\overline{X_T(\sigma^c)}.$$

令 $\varepsilon_i\downarrow 0$，记 $G_i=\{\lambda\,|\,|\lambda-\sigma|<\varepsilon_i\}\qquad(i=1,2,\cdots)$。从而

$$\sigma=\bigcap_{i=1}^{\infty}\bar{G}_i.$$

于是 $X_T(\sigma)=\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}X_T(\bar{G}_i)$. 注意 $P_{\bar{G}_i}\geqslant P_{\bar{G}_{i+1}}$. 由于 $\|P_{\bar{G}_i}\|\leqslant K$；据命题10.5，$\{P_{\bar{G}_i}\}_{i=1}^{\infty}$ 决定的 σ-Bool 代数有上确界 $P_{\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}\bar{G}_i}$ 及下确界 $P_{\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}\bar{G}_i}$，而且是射影算子，使得.

$$X=P_{\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}\bar{G}_i}X+\bigvee_{i=1}^{\infty}(I-P_{\bar{G}_i})X.$$

所以

$$\overline{X_T(\sigma^c)}\supseteq\bigvee_{i=1}^{\infty}(I-P_{\bar{G}_i})X,\ \ P_{\bar{G}_i}X=X_T(\bar{G}_i).$$

故 $P_{\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}\bar{G}_i}X=X_T(\sigma)$. 这样

$$X=X_T(\sigma)+\overline{X_T(\sigma^c)}\ .$$

定理10.3 设X是(OP)型空间，$T\in\mathscr{B}(X)$是有性质(J)之可分解算子当且仅当T是谱算子.

证明 充分性是明显的，往证必要性. 设 T 是有性质 (J) 的可分解算子，T 是(AC)算子. 对任意的 $\sigma\in\mathscr{B}$，若 $x\in\overline{X_T(\sigma)}$，$y\in\overline{X_T(\sigma^c)}$，则$x=\lim\limits_{n\to\infty}x_n$，$y=\lim\limits_{n\to\infty}y_n$，$x_n\in X_T(\sigma)$，$y_n\in X_T(\sigma^c)$ $(n=1,2,\cdots)$. 于是 $\sigma_T(x_n)\subseteq\sigma$，$\sigma_T(y_n)\subseteq\sigma^c$. 因此

$$\sigma_T(x_n)\cap\sigma_T(y_n)=\phi\qquad(n=1,2,\cdots).$$

由命题10.4，

$$\|x_n\|\leqslant K\|x_n+y_n\|\qquad(n=1,2,\cdots).$$

这样，

$$\|x\|\leqslant K\|x+y\|.$$

所以 T 具有性质$(B_{\mathscr{B}})$. 由命题10.6，不难看出，若 $\sigma\in\mathscr{F}$，则 $\sigma\in\Sigma_3\subseteq\mathscr{B}$. 又 $\mathscr{B}$ 是 σ-Bool 代数，必有 $\Sigma=\mathscr{B}$，由定理3.4，T 是谱算子.

注　记

谱算子是 N.Dunford[1] 于 1954 年引入的．命题 1.2 是著名的 B.J.Pettis 定理，见〔1〕之定理 1．§2 的一些结果是我们在〔1〕中给出过，它实际是〔1〕中相应结果更细致地刻划．定理 3.1是新给出的．定理3.2及3.3是属于N.Dunford[2]。定理3.4是我们新给的出的。定理 3.5 是著名的 B.Fuglede[1] 定理的谱算子形式。命题 3.4 是定理 3.3 的推论，是我们建立的。可见文献〔5〕，它描述谱子空间与谱流型之间关系。定理4.1是我们建立的，由此可推出 B.Nagy[2]建立的定理 4.2，定理 4.2 的证明是我们给出的，並非 B.Nagy 原证明。§5 的典型分解理论仍属 N.Dunford[1]。§6 的谱算子的解析函数演算亦属于 N.Dunford[3]．§7 的定理 7.1 依赖于 B.Sz-Nagy[1] 结果，本节主要结果，如命题7.1及定理7.2是属于 J.Wermer[1]．两个交换的谱算子之和与积在一般 Banach 空间未必还是谱算子，这方面例子可见 S.Kakutani[1]。但可证明和与积皆为广义谱算子[2]。§8 的谱算子的对偶理论，关于 (OP) 型空间的结果是属于波兰人 C.Bessage 与 A.Pefczynski[1]，(OP) 型空间概念是江泽坚[1]提出来的。已证明它是使谱算子许多性质得以成立的最佳可能空间。在此我们把 (OP) 型空间一些结果写成对偶形式。定理 8.1，8.2 及 8.3 都是在〔1〕中由我们建立的，在本书中做了新的证明。定理8.4是在〔1〕中建立的，它与可分解算子对偶定理中的谱极大空间$X_{T^*}^*(P)$是弱*闭正好形式是一致的。§9 的结果主要属于 E.Berkson 与 H.R.Dowson[1]以及 U.Fixman[1]．§10中的定理 10.2 是由 B.L.Wadhwa[1] 于 1973年建立的．而俞致寿[1]把此结果推广到(OP)型空间，即定理10.3．对于条件(P)，我们在文献〔5〕中给出几种等价形式，更明显地显示条件(P)的实质。此外关于谱算子与其谱的其它

性质的S.R.Foguel[1],[2]等结果我们在此未引入。有兴趣读者可参见专著〔1〕与〔3〕。

至于广义谱算子在 I.Colojoara[1] 中有论述，在I.Colojoara 与 C.Foias 专著〔2〕中有系统论述。

第五章　闭可分解算子

§1　说　　明

在本章总是考虑X上的闭线性算子T，为方便起见，T的谱、予解集以及其它平面点集，总是假定在紧复平面$\mathbb{C}_\infty=\mathbb{C}\cup\{\infty\}$上来考虑问题的。为函数演算等方便起见，还做一个非本质的假定，即T的予解集$\rho(T)$是$\mathbb{C}$上的非空点集。显然，若∞是T的予解式$R(\lambda,T)$的非孤立奇点，或者是T的谱点的聚点，则$\infty\in\sigma(T)$。那么，∞是$R(\lambda,T)$的孤立奇点如何呢？

命题 1.1　设$T\in C(X)$，∞是$R(\lambda,T)$的孤立奇点，则或者$T\in\mathscr{B}(X)$，∞是$R(\lambda,T)$的可去奇点，且$R(\infty,T)=0$，或者∞是$R(\lambda,T)$的本性奇点。

证明　若∞不是$R(\lambda,T)$的本性奇点，又$R(\lambda,T)$不恒为0，那么有展式

$$R(\lambda,T)=A\lambda^k+B\lambda^{k-1}+\cdots,$$

$A,\ B\in\mathscr{B}(X)$，$A\neq 0$，$|\lambda|$充分大，k是整数。于是

$$TR(\lambda,T)=I+\lambda R(\lambda,T)=I+A\lambda^{k+1}+R\lambda^{k}+\cdots.$$

首先证明$k\leqslant -1$。否则$k\geqslant 0$，于是

$$\lambda^{-(k+1)}R(\lambda,T)\to 0,\ |\lambda|\to\infty.$$

因此

$$T\lambda^{-(k+1)}R(\lambda,T)\to A,\ \ |\lambda|\to\infty.$$

由于T是闭线性算子，所以，$A=0$。矛盾。这样$k\leqslant-1$，从而$R(\lambda,T)\to 0$，$|\lambda|\to\infty$。故

$$TR(\lambda,T)\longrightarrow\begin{cases} I+A, & k=-1. \\ I, & k<-1.\end{cases}$$

又T是闭的，由上式可见，必然是$k=-1$，且$A=-I$。因此对任意$x\in X$，

$$\lambda R(\lambda,T)x\to -x,\quad T\lambda R(\lambda,T)x\to Bx.$$

由于T是闭的，$x\in D(T)$且$Tx=-Bx$，所以，$T=-B\in\mathscr{B}(X)$；且$R(\infty,T)=0$。

由此可见下面的命题成立。

命题 1.2 设$T\in C(X)$，则$\infty\in\rho(T)$当且仅当$T\in\mathscr{B}(X)$；或者$\infty\in\sigma(T)$当且仅当T是无界线性算子。

推论 1.3 设$T\in C(X)$，则$\sigma(T)$总是非空闭集。

§2 性　质 (A)

定义 2.1 X的闭线性子空间Y，称为T的不变子空间，如果

$$T(Y\cap D(T))\subseteq Y.$$

若Y是T的不变子空间，则T_Y亦是Y上的闭线性算子。而且$D(T_Y)=D(T)\cap Y$。特别，若$Y\subseteq D(T)$，则T_Y是Y上有界线性算子。

与有界线性算子情况一样可以证明：

(i) $\sigma_a(T)$是闭集，且$\partial\sigma(T)\subseteq\sigma_a(T)$；

(ii) 若$Y\in \mathrm{Lat}T$，G是$\rho(T)$之分支；则或$\sigma(T_Y)\cap G=\phi$，或$G\subseteq\sigma(T_Y)$；

(iii) 对任何$Y\in\mathrm{Lat}T$，$\sigma(T_Y)\subseteq\sigma(T)$当且仅当$R(\lambda,T)Y\subseteq Y$，$\lambda\in\rho(T)\setminus\{\infty\}$；

(iv) 第一章定理 1.2 的推论 2 对$T\in C(X)$也是成立的。

定义 2.2 $S\in\mathscr{B}(X)$称为与$T\in C(X)$可变换，如果

(i) $SD(T)\subseteq D(T)$，

(ii) $STx=TSx$，$x\in D(T)$。

定义 2.3 $Y\in\mathrm{Lat}T$称为T的超不变子空间，如果对每个

与T可变换的有界线性算子S，皆有$SY\subseteq Y$.

显然对$\lambda\in\rho(T)\setminus\{\infty\}$，$R(\lambda,T)$与$T$可变换.这样,如果$Y$是$T$的超不变子空间，则

$$\sigma(T|Y)\subseteq\sigma(T).$$

定义 2.4 $Y\in \mathrm{Lat}T$称为T的解析不变子空间，如果对任何X-值解析函数f：$D\to D(T)$($D\subseteq\mathbb{C}$是开集)，由

$$(\lambda I-T)f(\lambda)\in Y$$

可推出$f(\lambda)\in Y$，$\lambda\in D$.

类似有界线性算子，我们可以证明：设$Y,Z\in\mathrm{Lat}T$，$Y\subseteq Z$，则

(i) 如果Y是T的解析不变子空间，则Y亦是T_Z的解析不变子空间；

(ii) 如果Y是T_Z的解析不变子空间，Z是T的解析不变子空间，则Y也是T的解析不变子空间；

(iii) T的任意多个解析不变子空间之交仍是解析不变子空间；

(iv) 如果Y是T的解析不变子空间，则$\sigma(T|Y)\subseteq\sigma(T)$.

定义 2.5 $T\in C(X)$说是有单值扩张性，如果对任何X-值解析函数f：$D\to D(T)$($D\subseteq\mathbb{C}$是开集)，由

$$(\lambda I-T)f(\lambda)=0,\ \lambda\in D$$

可推出$f(\lambda)=0$，$\lambda\in D$.

对具有单值扩张性的闭线性算子，我们说它是闭的(A)算子.

如果$T\in C(X)$是(A)算子，对任何$x\in X$，可考虑T在x处的局部预解集

$$\rho_T(x)=\{\lambda|\lambda\in\mathbb{C}_\infty,\text{存在}\lambda\text{之邻域}V\text{及其上的解析函数}f(\lambda),\ \text{使}(\lambda I-T)f(\lambda)=x,\ \lambda\in V\setminus\{\infty\}\}.$$

T在x处的局部谱为

$$\sigma_T(x)=\mathbb{C}_\infty\setminus\rho_T(x).$$

由于T有单值扩张性，$R(\lambda,T)x$在x处的预解集$\rho_T(x)$上存在唯一的解析扩张，记为$\tilde{x}(\lambda)$，它是$R(\lambda,T)x$的最大解析扩张，而且

$$(\lambda I-T)\tilde{x}(\lambda)=x,\quad \lambda\in P_T(x)\setminus\{\infty\}.$$

命题 2.1 设$T\in C(X)$是(A)算子，则

(i) $\sigma_T(\alpha x+\beta y)\subseteq\sigma_T(x)\cup\sigma_T(y)$，$\alpha,\beta\in\mathbb{C}$，$x,y\subseteq X$；

(ii) $\widetilde{(\alpha x+\beta y)}(\lambda)=\alpha\tilde{x}(\lambda)+\beta\tilde{y}(\lambda)$，$\lambda\in\rho_T(x)\cap\rho_T(y)$；

(iii) $\sigma_T(x)=\phi$当且仅当$x=0$；

(iv) $\sigma_T(Sx)\subseteq\sigma_T(x)$，$S\in\mathscr{B}(X)$与$T$可交换；

(v) $\sigma_T(\tilde{x}(\lambda))=\sigma_T(x)$，$x\in X$，$\lambda\in\rho_T(x)\setminus\{\infty\}$.

证明 (i)与(ii)是显然成立的，至于(iii)的充分性亦显然成立，往证(iii)之必要性。由于考虑的是紧的平面，故$\sigma_T(x)=\phi$，这意味着$\tilde{x}(\lambda)$在紧平面上解析。根据Liouville定理，$\tilde{x}(\lambda)$是常数。令$\tilde{x}(\lambda)=\tilde{x}$。对$\lambda_1\neq\lambda_2$，有

$$(\lambda_1 I-T)\tilde{x}=x,\quad(\lambda_2 I-T)\tilde{x}=x.$$

因此

$$(\lambda_1-\lambda_2)I\tilde{x}=0,\quad\tilde{x}=0.$$

故此

$$x=0.$$

(iv)的证明也容易，我们证明(v)。设$\lambda\in\rho_T(x)\setminus\{\infty\}$. 因为$\tilde{x}(\mu)$是$R(\mu,T)x$之最大解析扩张，故

$$(\mu I-T)\tilde{x}(\mu)=x,\quad\mu\in\rho_T(x)\setminus\{\infty\}.$$

我们定义g_λ：$\rho_T(x)\to X$，

$$g_\lambda(\mu)=\begin{cases}-\dfrac{\tilde{x}(\mu)-\tilde{x}(\lambda)}{\mu-\lambda}, & \mu\neq\lambda\text{时},\\ -\tilde{x}'(\lambda), & \mu=\lambda\text{时}.\end{cases}$$

若$\infty\in\rho_T(x)$，$\tilde{x}(\infty)$是一向量，可定义$g_\lambda(\infty)=0$。于是$g_\lambda(\mu)$在$\rho_T(x)$上解析，且$\mu\neq\lambda$时，$g_\lambda(\mu)\in D(T)$，又

$$(\mu I-T)g_\lambda(\mu)=-\frac{x}{\mu-\lambda}+\tilde{x}(\lambda)+\frac{x}{\mu-\lambda}$$
$$=\tilde{x}(\lambda),\quad\mu\in\rho_T(x)\setminus\{\infty,\lambda\}.$$

设$\{\mu_n\}_{n=1}^{\infty}$是$\rho_T(x)$中一串异于$\{\lambda,\infty\}$的点列，且$\mu_n\to(n\to\infty)$.

由解析性，

$$g_\lambda(\mu_n)\to g_\lambda(\lambda),\ (n\to\infty).$$

而由上式

$$Tg_\lambda(\mu_n)=\mu_n g_\lambda(\mu_n)-\tilde{x}(\lambda)\to\lambda g_\lambda(\lambda)-\tilde{x}(\lambda)(n\to\infty)$$

又T是闭算子，所以$g_\lambda(\lambda)\in D(T)$，而且

$$Tg_\lambda(\lambda)=\lambda g_\lambda(\lambda)-\tilde{x}(\lambda),$$

即

$$(\lambda I-T)g_\lambda(\lambda)=\tilde{x}(\lambda).$$

总之，g_λ：$\rho_T(x)\to D(T)$在$\rho_T(x)$上解析，而且

$$(\mu I-T)g_\lambda(\mu)=\tilde{x}(\lambda),\ \mu\in\rho_T(x)\setminus\{\infty\}.$$

所以

$$\sigma_T(\tilde{x}(\lambda))\subseteq\sigma_T(x).$$

反之，设$\xi_\lambda(\mu)$是$R(\mu;T)\tilde{x}(\lambda)$的最大解析扩张，则

$$(\mu I-T)\xi_\lambda(\mu)=\tilde{x}(\lambda),\ \mu\in\rho_T(\tilde{x}(\lambda))\setminus\{\infty\}.$$

注意$\tilde{x}(\lambda)$是$R(\lambda,T)x$之最大解析扩张，因而

$$\begin{aligned}(\mu I-T)(\lambda I-T)\xi_\lambda(\mu)&=(\lambda I-T)(\mu I-T)\xi_\lambda(\mu)\\&=(\lambda I-T)\tilde{x}(\lambda)\\&=x,\qquad \mu\in\rho_T(\tilde{x}(\lambda))\setminus\{\infty\}.\end{aligned}$$

由前式，

$$(\lambda I-T)\xi_\lambda(\mu)=(\lambda-\mu)I\xi_\lambda(\mu)+\tilde{x}(\lambda),$$
$$\mu\in\rho_T(\tilde{x}(\lambda))\setminus\{\infty\}.$$

由此可见 $(\lambda I-T)\xi_\lambda(\mu)$在$\rho_T(\tilde{x}(\lambda))\setminus\{\infty\}$上解析. 如果$\infty\in\rho_T(\tilde{x}(\lambda))$，根据$T$的闭性和 $\xi_\lambda(\mu)$在 $\{\infty\}$附近解析，可以证明$(\lambda I-T)\xi_\lambda(\mu)$在$\{\infty\}$附近解析. 这样$(\lambda I-T)\xi_\lambda(\mu)$在$(\rho_T(\tilde{x}(\lambda))$上解析。因此

$$\sigma_T(x)\subseteq\sigma_T(\tilde{x}(\lambda)).$$

命题 2.2 设$T\in C(X)$是(A)算子，则

$$\sigma(T)=\bigcup_{x\in X}\sigma_T(x).$$

证明 首先，$\sigma_T(x)\subseteq\sigma(T)$，$x\in X$，因此

$$\bigcup_{x\in X}\sigma_T(x)\subseteq\sigma(T).$$

用反证法证明相反包含关系。假设

$$\mu\in\sigma(T)\setminus\bigcup_{x\in X}\sigma_T(x)$$

分两种情况证明：

(i) 若$\mu\neq\infty$，对每个$x\in X$，$\mu\in\rho_T(x)$，$\tilde{x}(\mu)\in D(T)$，使之

$$(\mu I-T)\tilde{x}(\mu)=x,$$

可见$(\mu I-T)$是满射的．由本节注记(iv)，$\mu\notin\sigma(T)$。矛盾。

(ii) 若$\mu=\infty$，对每个$x\in X$，$\infty\in\sigma_T(x)$，所以$\tilde{x}(\lambda)$在$\{\infty\}$邻域V内解析，而且

$$(\lambda I-T)\tilde{x}(\lambda)=x,\quad \lambda\in V\setminus\{\infty\}.$$

于是

$$T\left(\frac{1}{\lambda}\tilde{x}(\lambda)\right)=\tilde{x}(\lambda)-\frac{1}{\lambda}x,\quad \lambda\in V\setminus\{\infty\}.$$

注意$\left(\frac{1}{\lambda}\tilde{x}(\lambda)\right)$在$V$内解析；而且当 $\lambda\to\infty$时，$\frac{1}{\lambda}\tilde{x}(\lambda)\to 0$，又

$\tilde{x}(\lambda)-\frac{1}{\lambda}x\to\tilde{x}(\infty)$．$T$是闭线性算子，可知 $\tilde{x}(\infty)=0$．所以

∞至少是$\tilde{x}(\lambda)$的一级零点，可设

$$\tilde{x}(\lambda)=\frac{1}{\lambda}\tilde{x}_1(\lambda),\quad \lambda\in V.$$

$\tilde{x}_1(\lambda)\in D(T)$且在$V$上解析，于是

$$(\lambda I-T)\left(\frac{1}{\lambda}\tilde{x}_1(\lambda)\right)=x,\quad \lambda\in V\setminus\{\infty\}.$$

又当$\lambda\to\infty$时，

$$\frac{1}{\lambda}\tilde{x}_1(\lambda)\to 0,\ \tilde{x}_1(\lambda)-x\to\tilde{x}_1(\infty)-x.$$

由于T是闭的，可知$\tilde{x}_1(\infty)-x=0$，即

$$x=\tilde{x}_1(\infty)\in D(T).$$

这说明$X\subseteq D(T)$，故$T\in\mathscr{B}(X)$. 这与$\infty\in\sigma(T)$相矛盾. 证毕.

和有界线性算子情况一样，可以证明：

(i) 设$T\in C(X)$是(A)算子，$Y\in\operatorname{Lat}T$，则$T_Y\in C(Y)$亦是(A)算子，而且

$$\sigma_T(x)\subseteq\sigma_{T_Y}(x),\ x\in Y;$$

(ii) 设$T\in C(X)$是(A)算子，Y是T的解析不变子空间，则

$$\sigma_T(x)=\sigma_{T_Y}(x),\ x\in Y.$$

命题 2.3 设$T\in C(X)$，则T是(A)算子当且仅当对任何$\alpha\in\rho(T)\setminus\{\infty\}$，$A=-R(\alpha,T)$是$(A)$算子.

证明 设T是(A)算子. 令$\alpha\in\rho(T)\setminus\{\infty\}$，而且$f$: $D\to X$是解析函数，

$$(\mu I-A)f(\mu)=0,\ \mu\in D.$$

不妨设$0\notin D$，$\mu=\Phi(\lambda)=(\lambda-\alpha)^{-1}$，注意$\Phi^{-1}(D)$是$\mathbb{C}_\infty$中的开集，而且

$$\begin{aligned}\mu I-A&=(\lambda-\alpha)^{-1}I+R(\alpha,T)\\&=(\lambda I-T)\Phi(\lambda)R(\alpha,T),\ \lambda\in\Phi^{-1}(D).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&(\lambda I-T)\Phi(\lambda)R(\alpha,T)f(\Phi(\lambda))\\&=0,\ \lambda\in\Phi^{-1}(D).\end{aligned}$$

由$\Phi(\lambda)R(\alpha,T)f(\Phi(\lambda))\in D(T)$且在$\Phi^{-1}(D)$上解析；$T$是$(A)$算子，可知

$$\Phi(\lambda)R(\alpha,T)f(\Phi(\lambda))=0,\ \lambda\in\Phi^{-1}(D).$$

以$[\Phi(\lambda)]^{-1}(\alpha I-T)$作用上式，则

$$f(\Phi(\lambda))=0,\lambda\in\Phi^{-1}(D),$$

或者

$$f(\mu)=0,\ \mu\in D.$$

可见A是(A)算子.

反过来的证明类似.

命题2.4 设$T\in C(X)$是(A)算子，若对$x\in X$，局部谱$\sigma_T(x)$有界，则$x\in D(T)$.

证明 若$\sigma_T(x)$有界，则$\infty\in\rho_T(x)$，所以存在$\{\infty\}$的邻域V上的解析函数f: $V\to D(T)$，使

$$(\lambda I-T)f(\lambda)=x,\ \lambda\in V\setminus\{\infty\}.$$

于是

$$T\left(\frac{1}{\lambda}f(\lambda)\right)=f(\lambda)-\frac{1}{\lambda}x,\ \lambda\in V\setminus\{\infty\}.$$

当$\lambda\to\infty$时，$\frac{1}{\lambda}f(\lambda)\to 0$，而$f(\lambda)-\frac{1}{\lambda}x\to f(\infty)$.从$T$之闭性，应有$f(\infty)=0$，故$\infty$至少是$f(\lambda)$的一级零点。于是

$$\lambda\left(f(\lambda)-\frac{1}{\lambda}x\right)=\lambda f(\lambda)-x$$

在$\lambda\to\infty$时极限存在，令其为y_1。由于

$$Tf(\lambda)=\lambda f(\lambda)-x,\ \lambda\in V\setminus\{\infty\},$$

及T的闭性可知$f(\infty)=y_1$，故$y_1=0$。由此可知∞是$\lambda f(\lambda)-x$的零点，故当$\lambda\to\infty$时，$\lambda[\lambda f(\lambda)-x]$的极限亦存在，令其为$y_2$.因此，当$\lambda\to\infty$时，

$$T[\lambda f(\lambda)]=\lambda[\lambda f(\lambda)-x]$$

有极限y_2。但由于$y_1=0$，可知$\lambda f(\lambda)\to x$($\lambda\to\infty$时)，再根据T的闭性可知，$x\in D(T)$。

命题 2.5 设$T\in C(X)$是(A)算子，$\alpha\in\rho(T)\setminus\{\infty\}$，而且$A=-R(\alpha,T)$，则对任何$x\in X$，

$$\sigma_A(x)=\Phi(\sigma_T(x)).$$

其中$\Phi(\lambda)=(\lambda-\alpha)^{-1}$。

证明 由于Φ是关于λ的单映射；因此只须证明$\rho_A(x)=\Phi(\rho_T(x))$。

设$\lambda_0\in\rho_T(x)$。则有λ_0之邻域V上的解析函数，使得

$$(\lambda I-T)f(\lambda)=x,\ \lambda\in V\setminus\{\infty\}.$$

若$\infty\notin V$，则$0\notin\Phi(V)$。令$\mu=\Phi(\lambda)$，$\lambda\in V$，$\mu_0=\Phi(\lambda_0)$。于是

$$(\mu I-A)\mu^{-1}(\alpha I-T)f(\Phi^{-1}(\mu))$$
$$=x,\mu\in\Phi(V)\setminus\{\infty\}. \tag{2.1}$$

注意$A=-R(\alpha,T)$，故有

$$\mu\{\mu^{-1}(\alpha I-T)f(\Phi^{-1}(\mu))\}=x-\mu^{-1}f(\Phi^{-1}(\mu)).$$

这样，

$\mu^{-1}\{(\alpha I-T)f(\Phi^{-1}(\mu))\}=\mu^{-1}x-\mu^{-2}f(\Phi^{-1}(\mu))$。但右端在$\mu_0$之邻域$\Phi(V)$上解析；所以$\mu^{-1}\{(\alpha I-T)f(\Phi^{-1}(\mu))\}$在$\Phi(V)$上解析。因此由(2.1)式可知，$\mu_0\in\rho_A(x)$. 即$\Phi(\lambda_0)\in\rho_A(x)$。由$\lambda_0$之任意性，即得

$$\Phi(\rho_T(x))\subseteq\rho_A(x).$$

若$\infty\in V$，则$0\in\Phi(V)$. 由上式证明容易看到当$0\neq\mu\in\Phi(V)\setminus\{\infty\}$时，$\mu^{-1}(\alpha I-T)f(\Phi^{-1}(\mu))$是解析的，故前式亦成立。为此只须证明$\mu^{-1}(\alpha I-T)f(\Phi^{-1}(\mu))$在$\mu=0$处解析且使前式成立即可。

因为$\infty\in V\subseteq\rho_T(x)$，故$f(\lambda)$在$\{\infty\}$之邻域$V$上解析且满足

$$(\lambda I-T)f(\lambda)=x,\ \lambda\in V\setminus\{\infty\}.$$

由$\infty\in\rho_T(x)$知$\sigma_T(x)$有界，由命题2.4；$x\in D(T)$；且$\lambda[\lambda f(\lambda)-x]\to Tx$，($\lambda\to\infty$时)。可见，

$$\lambda f(\lambda)-x\to0,\ f(\lambda)\to0\ (\lambda\to\infty\text{时}).$$

注意

$$\mu^{-1}\{(\alpha I-T)f(\Phi^{-1}(\mu))\}$$
$$=\mu^{-1}x-\mu^{-2}f(\Phi^{-1}(\mu))=(\lambda I-\alpha I)x-(\lambda-\alpha)^2f(\lambda)$$
$$=-\lambda[\lambda f(\lambda)-x]+2\alpha[\lambda f(\lambda)-x]+\alpha^2f(\lambda)+\alpha x,$$

上式右端关于λ在∞处解析，且于∞处取值为$\alpha x-Tx$，但$\lambda=\infty$

时，$\mu=0$. 所以$\mu^{-1}(\alpha I-T)f(\Phi^{-1}(\mu))$在$\mu=0$之邻域内解析，而且在$\mu=0$处取值为$(\alpha I-T)x$. 因此所证之式在$\mu=0$时亦成立。从而$\Phi(\rho_T(x))\subseteq\rho_A(x)$恒成立.

反之，设$\xi_0\in\rho_A(x)$，则有ξ_0之邻域U上的解析函数g，满足

$$(\xi I-A)g(\xi)=x,\ \xi\in U\setminus\{\infty\}.$$

若$\xi_0=\infty$，则$\xi_0=\Phi(\alpha)$，又$\alpha\in\rho(T)\setminus\{\infty\}\subseteq\rho_T(x)$，于是$\xi_0\in\Phi(\rho_T(x))$；若$\xi_0\neq\infty$，应有唯一的$\lambda_0\neq\alpha$，使$\xi_0=\Phi(\lambda_0)$. 由映射$\xi=\Phi(\lambda)$得

$$(\xi I-A)=(\lambda I-T)\Phi(\lambda)R(\alpha,T),\ \lambda\in\Phi^{-1}(U)\setminus\{\infty\}.$$

于是

$$(\lambda I-T)\Phi(\lambda)R(\alpha,T)g[\Phi(\lambda)]=x,\ \lambda\Phi\in^{-1}(U)\setminus\{\infty\}.$$

因为$\Phi(\lambda)R(\alpha,T)g[\Phi(\lambda)]$在$\lambda_0$之邻域$\Phi^{-1}(U)$上解析，由上式知，$\lambda_0\in\rho_T(x)$。于是$\xi_0=\Phi(\lambda_0)\in\Phi(\rho_T(x))$。这样$\rho_A(x)\subseteq\Phi(\rho_T(x))$。所以

$$\sigma_A(x)=\Phi(\sigma_T(x)),\ x\in X.$$

定理 2.1（闭算子局部谱映射定理） 设$T\in C(X)$，f是$\sigma(T)$之邻域G上的解析函数，而且在G与$\sigma(T)$相交的每个分支上不为常数，则$f(T)$是(A)算子当且仅当T是(A)算子，而且

$$\sigma_{f(T)}(x)=f(\sigma_T(x)),\ x\in X.$$

证明 先证明第一个结论。设$\alpha\in G^c\subseteq\rho(T)$，令$A=-R(\alpha,T)$，$\mu=\Phi(\lambda)=(\lambda-\alpha)^{-1}$，$\varphi(\mu)=f(\Phi^{-1}(\mu))$，$\mu\in\Phi(G)$，于是$\varphi$是$\sigma(A)$之开邻域$\Phi(G)$上的解析函数，且在$\Phi(G)$与$\sigma(A)$相交的每个分支上不为常数。由Riesz-Dunford关于闭算子的函数演算，

$$f(T)=\varphi(A).$$

这样由第一章定理3.1知第一个结论成立。

此外由$f(T)=\varphi(A)$，知

$$\sigma_{f(T)}(x)=\sigma_{\varphi(A)}(x),\ x\in X.$$

又$A\in\mathscr{B}(X)$，由命题2.3，A是(A)算子，由前证$\varphi(A)$是(A)算

子，因此据第一章定理 3.2 知道

$$\sigma_{\varphi(A)}(x)=\varphi(\sigma_A(x)).$$

由命题 2.5，

$$\sigma_A(x)=\Phi(\sigma_T(x)).$$

所以

$$\varphi(\sigma_A(x))=\varphi(\Phi(\sigma_T(x))).$$

根据φ的定义及Φ的单射性，

$$\varphi(\Phi(\sigma_T(x)))=f[\Phi^{-1}(\Phi(\sigma_T(x)))]=f(\sigma_T(x)).$$

因此

$$\sigma_{f(T)}(x)=f(\sigma_T(x)),\ x\in X.$$

定理 2.2 设$T\in C(X)$是(A)算子，f是$\sigma(T)$之邻域G上的解析函数，且在G与$\sigma(T)$相交的每个分支上不为常数，则

$$X_{f(T)}(F)=X_T(f^{-1}(F)),\ F\in\mathscr{F}.$$

证明 由定理 2.1，$f(T)$是(A)算子，流形$X_{f(T)}(F)$有意义。

令$x\in X_{f(T)}(F)$，由定理 2.1，

$$f(\sigma_T(x))=\sigma_{f(T)}(x)\subseteq F,\ F\in\mathscr{F},$$

因此，$\sigma_T(x)\subseteq f^{-1}(F)$。这样，

$$x\in X_T(f^{-1}(F)),\quad F\in\mathscr{F},$$

所以

$$X_{f(T)}(F)\subseteq X_T(f^{-1}(F)),\ F\in\mathscr{F}.$$

反之，令$x\in X_T(f^{-1}(F))$，于是

$$\sigma_T(x)\subseteq f^{-1}(F),\ F\in\mathscr{F}.$$

由定理 2.1，

$$\sigma_{f(T)}(x)=f(\sigma_T(x))\subseteq f[f^{-1}(F)]=F,\ F\in\mathscr{F}.$$

因此

$$X_T(f^{-1}(F))\subseteq X_{f(T)}(F),\ F\in\mathscr{F}.$$

证毕。

由命题 1.2 即可得到下面的定理。

定理 2.3 设$T\in C(X)$，$Y\in\mathrm{Lat}T$，又$\sigma(T_Y)$有界，则Y

$\subseteq D(T)$.

§3 性 质 (AC)

设$T\in C(X)$是(A)算子，可考虑T的超不变流形

$$X_T(F)=\{x|x\in X,\ \sigma_T(x)\subseteq F\},\ F\in\mathscr{F}.$$

一般流形$X_T(F)$不是闭的，因此有下述定义：

定义 3.1 设$T\in C(X)$是(A)算子，若对任何$F\in\mathscr{F}$，流形$X_T(F)$皆闭，则称T具有性质(AC)。具有性质(AC)的闭线性算子可称为(AC)算子。

定义 3.2 设$T\in C(X)$，$Y\in\mathrm{Lat}T$称为T的谱极大空间，如果对T的任何不变子空间Z，由

$$\sigma(T|Z)\subseteq\sigma(T|Y)\quad.$$

可推出$Z\subseteq Y$。

显然，如果$T\in C(X)$是(AC)算子，Y是T的谱极大空间，则T_Y亦是(AC)算子；又由定理 2.2 可知，如果$T\in C(X)$是(AC)算子，f是$\sigma(T)$的邻域上的解析函数，且在它的每个分支上皆非常数，则$f(T)$亦是(AC)算子。

命题 3.1 如果$T\in C(X)$的谱极大空间$Y\subseteq D(T)$，则Y是T的超不变子空间。

证明 设$S\in\mathscr{B}(X)$且$TS=ST$，$\mu\in\rho(s)$．令$S_1=\mu I-S$，则$S_1\in\mathscr{B}(X)$且仍与T交换。又S_1是可逆的，由假设$Y\subseteq D(T)$，故有

$$TS_1Y=S_1TY\subseteq S_1Y$$

可见$S_1Y\in\mathrm{Lat}T$。

设$\lambda\in\rho(T_Y)$，对任何$x\in S_1Y$，若有$(\lambda I-T)x=0$，由于存在$y\in Y$，使$x=S_1y$，所以

$$S_1(\lambda I-T)y=(\lambda I-T)S_1y=(\lambda I-T)x=0.$$

而S_1可逆，故$(\lambda I-T)y=0$，即

$$(\lambda I - T_Y)y = 0.$$

而$\lambda I - T_Y$可逆，因此$y=0$，从而$x=0$。可见，$\lambda I - T|S_1Y$是单射的。

若$x\in S_1Y$，则有$y\in Y$，使得$x=S_1y$，而$\lambda I - T_Y$是满射的，存在$z\in Y$，使得

$$(\lambda I - T)z = y.$$

因此

$$(\lambda I - T)S_1z = S_1(\lambda I - T)z = S_1y = x.$$

而$S_1z\in S_1Y$，故$\lambda I - T|S_1Y$是满射的。这样$\lambda\in\rho(T|S_1Y)$，即

$$\sigma(T|S_1Y)\subseteq\sigma(T_Y).$$

因为Y是T的谱极大空间，故$S_1Y\subseteq Y$，因此

$$SY = (\mu I - S_1)Y\subseteq Y.$$

可见Y是T的超不变子空间。

定理 3.1 设$T\in C(X)$是(AC)算子，则对任何$F\in\mathscr{F}$，$X_T(F)$是T的谱极大空间，而且

$$\sigma(T|X_T(F))\subseteq F\cap\sigma(T).$$

证明 关于$X_T(F)$是谱极大空间的证明可完全仿照第二章定理2.2来进行。

设$\lambda\in F^c$。分两种情形：

(i) $\lambda\neq\infty$，对任何$x\in X_T(F)$，$\sigma_T(x)\subseteq F$，故$\tilde{x}(\lambda)\in D(T)$，且

$$(\lambda I - T)\tilde{x}(\lambda) = x.$$

由命题 2.1 之(v)，$\sigma_T(\tilde{x}(\lambda)) = \sigma_T(x)\subseteq F$，可见$\tilde{x}(\lambda)\in X_T(F)$。这说明$\lambda I - T|X_T(F)$是满射的，又$T|X_T(F)$是$(A)$算子，故由§2注记(iv)知$\lambda\notin\sigma(T|X_T(F))$。

(ii) $\lambda=\infty$。对任何$x\in X_T(F)$，皆有$\infty\in\rho_T(x)$，由命题 2.4 可知，$x\in D(T)$。于是$X_T(F)\subseteq D(T)$.从而$T|X_T(F)$是有界线性算子，即$\infty\notin\sigma(T|X_T(F))$。总之

$$\sigma(T|X_T(F))\subseteq F.$$

$X_T(F)$是T的超不变子空间，因此

$$\sigma(T|X_T(F))\subseteq\sigma(T).$$

类似于第二章命题 1.2 的证明，我们有：

定理 3.2 设$T\in C(X)$是(A)算子，则T的谱极大空间皆是T之解析不变子空间。

同样不难证明下面两个命题.

命题 3.2 设$T\in C(X)$是(A)算子，则T之任意多个谱极大空间之交仍是T的谱极大空间。

命题 3.3 设$T\in C(X)$是(A)算子，$Y,Z\in\mathrm{Lat}T$，且$Y\subseteq Z$；则

(i) 若Y是T的谱极大空间，则Y亦是T_Z的谱极大空间；

(ii) 若Y是T_Z的谱极大空间，Z亦是T的谱极大空间，则Y是T的谱极大空间。

定理 3.3 设$T\in C(X)$是(AC)算子，Y是T的谱极大空间，则

$$Y=X_T(\sigma(T_Y)).$$

证明 对任何$y\in Y$，由命题 2.2，

$$\sigma_T(y)=\sigma_{T_Y}(y)\subseteq\sigma(T_Y).$$

因此，$y\in X_T(\sigma(T_Y))$，故

$$Y\subseteq X_T(\sigma(T_Y)).$$

反之，由于T是(AC)算子，由定理 3.1，

$$\sigma(T|X_T(\sigma(T_Y)))\subseteq\sigma(T_Y),$$

再由谱极大空间的定义 3.2 及Y是谱极大空间可知

$$X_T(\sigma(T_Y))\subseteq Y.$$

这样

$$Y=X_T(\sigma(T_Y)).$$

§4 闭可分解算子

定义 4.1 $T\in C(X)$称为可分解算子，如果

(i) 存在T之谱极大空间族$\{Y_k\}_{k=1}^{\infty}$，使得，

$$X=\bigvee_{k=1}^{\infty}\{Y_k\},\ \sigma(T|Y_k)\in\mathscr{K}\quad(k=1,2,\cdots);$$

(ii) 对$\mathbb{C}_\infty$的任意开复盖$\{G_k\}_{k=1}^{n}$，存在T的谱极大空间族$\{Y_k\}_{k=1}^{n}$，使得

$$X=\sum_{k=1}^{n}Y_k,\ \sigma(T|Y_k)\subseteq G_k\quad(k=1,\cdots,n).$$

显然当$T\in\mathscr{B}(X)$时，这里的定义与第三章的定义 1.2 是一致的。

特别，由定理 2.3，若某个G_i相对紧时，则$Y_k\subseteq D(T)$。由定义 4.1 不难证明：

命题 4.1 设$T\in C(X)$是可分解算子，G是$\mathbb{C}_\infty$的开集，且$G\cap\sigma(T)\neq\phi$，则存在T的非零谱极大空间Y，使得

$$\sigma(T|Y)\subseteq G.$$

定理 4.1 设$T\in C(X)$是可分解算子，则

$$\sigma(T)\setminus\{\infty\}=\sigma_a(T).$$

证明 若存在$\lambda\in\sigma(T)\setminus[\{\infty\}\cup\sigma_a(T)]$，由$\sigma(T)$及$\sigma_a(T)$皆为闭集，存在开圆域$G$，使$\lambda\in G$，并且$G\cap\sigma_a(T)=\phi$。由命题 4.1，存在$T$之谱极大空间$Y$，使得

$$\sigma(T|Y)\subseteq G.$$

存在$\mu\in\partial\sigma(T|Y)\subseteq G$。由于$\partial\sigma(T|Y)\subseteq\sigma_a(T|Y)$，因此

$$\mu\in\sigma_a(T|Y)\subseteq\sigma_a(T).$$

这和$G\cap\sigma_a(T)=\phi$矛盾。证毕。

定理 4.2 设$T\in C(X)$是可分解算子，则T是(A)算子。

证明 设$f: D\to D(T)$是解析函数（D是$\mathbb{C}$中开集），且使

$$(\lambda I-T)f(\lambda)=0,\ \lambda\in D.$$

不妨设D是连通的。若$D\cap\rho(T)\neq\phi$，令$U\subseteq D\cap\rho(T)$是一小开圆域，则

$$(\lambda I-T)f(\lambda)=0,\ \lambda\in U.$$

在U上，$\lambda I-T$可逆，故$f(\lambda)=0$，$\lambda\in U$. 由解析函数之唯一性定理，$f(\lambda)=0$，$\lambda\in D$。因此可设$D\subseteq\rho(T)$。

令$\{G_1,G_2\}$是$\mathbb{C}_\infty$之一开复盖，使得G_1是单连通的有界开集，而且

$$D\setminus\bar{G}_k\neq\phi\quad(k=1,2).$$

由T的可分解性，存在T的谱极大空间$\{Y_1,Y_2\}$，使得

$$X=Y_1+Y_2,\ \sigma(T|Y_k)\subseteq G_k\qquad(K=1,2).$$

由于$\bar{G}_1$是紧的，故$Y_1\subseteq D(T)$。注意$D\setminus\bar{G}_1\neq\phi$，由第三章命题1.2，存在小开圆域$V\subseteq D\setminus\bar{G}_1$及$V$上的解析函数$f_k:V\to Y_k$ ($k=1,2$)，使得

$$f(\lambda)=f_1(\lambda)+f_2(\lambda),\ \lambda\in V.$$

因为$f,f_1\in D(T)$，故$f_2\in D(T)$。于是

$$0=(\lambda I-T)f(\lambda)=(\lambda I-T)f_1(\lambda)+(\lambda I-T)f_2(\lambda),\lambda\in V,$$

因此

$$(\lambda I-T)f_1(\lambda)=(T-\lambda I)f_2(\lambda)\in Y_1\cap Y_2,\quad \lambda\in V.$$

令$Y=Y_1\cap Y_2$，则Y是Y_1的子空间，且$Y\subseteq D(T)$。而V在$\rho(T|Y_1)$的无界分支中，故$V\subseteq\rho(T|Y)$。令$g_1(\lambda)=(\lambda I-T)f_1(\lambda)$，则$R(\lambda,T_Y)g_1(\lambda)\in Y$，$\lambda\in V$。而且

$$\begin{aligned}&(\lambda I-T_{Y_1})[f_1(\lambda)-R(\lambda,T_Y)g_1(\lambda)]\\&=(\lambda I-T)f_1(\lambda)-(\lambda-T_Y)R(\lambda,T_Y)g_1(\lambda)\\&=0,\ \lambda\in V.\end{aligned}$$

由于$\lambda I-T_{Y_1}$在Y_1上可逆，故

$$f_1(\lambda)=R(\lambda,T_Y)g_1(\lambda),\ \lambda\in V,$$

即$f_1(\lambda)\in Y\subseteq Y_2$。从而$f(\lambda)\in Y_2$，$\lambda\in V$。据解析开拓，$f(\lambda)\in Y_2$，$\lambda\in D$. 又$D\setminus\bar{G}_2\neq\phi$，可取开圆域$W\subseteq D\setminus\bar{G}_2$，但是

$$(\lambda I - T_{Y_2}) f(\lambda) = 0, \ \lambda \in W,$$

而且$W \subseteq \rho(T_{Y_2})$，于是$f(\lambda) = 0$，$\lambda \in W$. 再由解析函数唯一性定理，$f(\lambda) = 0$，$\lambda \in D$.

定义 4.2 $T \in C(X)$称为可分解谱的算子，如果对$\mathbb{C}_\infty$的任何开复盖$\{G_k\}_{k=1}^n$，存在T的不变子空间族，$\{Y_k\}_{k=1}^n$，使得

$$X = \sum_{k=1}^n Y_k, \ \sigma(T|Y_k) \subseteq G_k, \ (k = 1, \cdots n),$$

而且

$$\sigma(T) = \bigcup_{k=1}^n \sigma(T|Y_k).$$

命题 4.2 设 $T \in C(X)$是可分解算子，则 T 是可分解谱的算子.

证明 设$\{G_k\}_{k=1}^n$是$\mathbb{C}_\infty$的开复盖，由于T是可分解算子，存在T的谱极大空间族$\{Y_k\}_{k=1}^n$，使得

$$X = \sum_{k=1}^n Y_k, \ \sigma(T|Y_k) \subseteq G_k \ (k = 1, \cdots, n).$$

由定理4.2及定理3.2,

$$\bigcup_{k=1}^n \sigma(T|Y_k) \subseteq \sigma(T).$$

另一方面，对任何$x \in X$，有$y_k \in Y_k \ (k = 1, \cdots, n)$，使$x = \sum_{k=1}^n y_k$. 由命题2.1,

$$\sigma_T(x) \subseteq \bigcup_{k=1}^n \sigma_T(y_k) = \bigcup_{k=1}^n \sigma_{T|_{Y_k}}(y_k) \subseteq \bigcup_{k=1}^n \sigma(T|Y_k),$$

再由命题2.2,

$$\sigma(T) = \bigcup_{x \in X} \sigma_T(x) \subseteq \bigcup_{k=1}^n \sigma(T|Y_k).$$

命题 4.3 设$T \in C(X)$是可分解算子，则T是稠定义的.

证明 由定义 4.1 之(i)，存在T之谱极大空间$\{Y_k\}_{k=1}^{\infty}$，使得

$$X=\overline{\sum_{k=1}^{\infty}Y_k}=\bigvee_{k=1}^{\infty}\{Y_k\};\text{且}\sigma(T|Y_k)\in\mathscr{K}\ (k=1,2,\cdots).$$

由定理 2.3，$Y_k\subseteq D(T)\ (k=1,2,\cdots)$，因此

$$\overline{D(T)}=X.$$

证毕.

对任意复数λ，D表示$\mathbb{C}_\infty$的任意Borel集，令

$$\lambda-D=\{\lambda-\mu|\mu\in D\},\quad D^{-1}=\{\mu|\mu\in\mathbb{C}_\infty,\ \mu^{-1}\in D\}.$$

不难看出，若D是$\mathbb{C}_\infty$中的开或闭集，$\lambda-D$，D^{-1}亦是$\mathbb{C}_\infty$中的开或闭集.

定理 4.3 设$T\in C(X)$是可分解算子，则对任何$\lambda\in\rho(T)\setminus\{\infty\}$，$R(\lambda,T)$是有界可分解算子.

证明 令$\lambda\in\rho(T)\setminus\{\infty\}$，则$R(\lambda,T)\in\mathscr{B}(X)$，又令$\{G_k\}_{k=1}^{n}$是$\mathbb{C}$的任意开复盖，且取

$$G_0=\{\mu|\mu\in\mathbb{C}_\infty,\ |\mu|>\|R(\lambda,T)\|\},$$

则$\{\lambda-(G_k\cup G_0)^{-1}\}_{k=1}^{n}$是$\mathbb{C}_\infty$的开复盖，存在$T$的谱极大空间族$\{Y_k\}_{k=1}^{n}$，使得

$$X=\sum_{k=1}^{n}Y_k,\ \sigma(T|Y_k)\subseteq\lambda-(G_k\cup G_0)^{-1}\quad(k=1,\cdots,n).$$

因为$\sigma(T|Y_k)\subseteq\sigma(T)\ (k=1,\cdots,n)$，所以

$$R(\lambda,T)Y_k\subseteq Y_k\qquad(k=1,\cdots,n).$$

故

$$R(\lambda,T)|Y_k=R(\lambda,T_{Y_k})\qquad(k=1,\cdots,n).$$

据谱映射定理，

$$\sigma(R(\lambda,T_{Y_k}))=[\lambda-\sigma(T_{Y_k})]^{-1}\qquad(k=1,\cdots,n),$$

因而

$$\sigma(R(\lambda,T)|Y_k)\subseteq G_k\cup G_0\qquad(k=1,\cdots,n).$$

按着G_0的选取，$\sigma(R(\lambda,T)|Y_k)\cap G_0=\phi$，故

$$\sigma(R(\lambda,T)|Y_k)\subseteq G_k \qquad (k=1,\cdots,n).$$

这样$R(\lambda,T)$是有谱分解性质算子，据第三章定理2.4，$R(\lambda,T)$是可分解算子。

命题 4.4 设$T\in C(X)$是可分解算子，则T是(AC)算子.

证明 由定理 4.2 知，T 是(A) 算子，因此只须证明对任意$F\in\mathscr{F}$，$X_T(F)$皆为闭。令$\alpha\in\rho(T)\setminus\{\infty\}$，$A=-R(\alpha,T)$，由定理 2.2，

$$X_T(F)=X_A(\Phi(F)),\quad F\in\mathscr{F},$$

其中$\Phi(\lambda)=(\lambda-\alpha)^{-1}$。

据定理 4.3，A是有界可分解算子，由于$\Phi(F)\in\mathscr{F}$，故由第三章定理 1.2 知，$X_A(\Phi(F))$是闭的，因此$X_T(F)$是闭的，由定义 3.1，T是(AC)算子。

命题 4.5 设$T\in C(X)$是可分解算子，则对任何$F\in\mathscr{F}$及开集$G\supseteq F$，存在T的谱极大空间Y，使得

$$F\cap\sigma(T)\subseteq\sigma(T|Y)\subseteq G.$$

证明 令$H=F^c$，则$\{G,H\}$是$\mathbb{C}_\infty$之开复盖. 由命题 4.2，T有可分解谱，所以存在T的谱极大空间$\{Y,Z\}$，使

$$X=Y+Z,\quad \sigma(T|Y)\subseteq G,\sigma(T|Z)\subseteq H,$$

而且

$$\sigma(T)=\sigma(T|Y)\cup\sigma(T|Z).$$

注意$\sigma(T|Z)\cap F=\phi$，故

$$F\cap\sigma(T)=\sigma(T|Y)\cap F\subseteq\sigma(T|Y)\subseteq G.$$

谱极大空间Y即为所求。

§5 闭可分解算子的函数演算

命题5.1 设$T\in C(X)$，若对某个$\alpha\in\rho(T)$，$A=-R(\alpha,T)$是有界可分解算子，且

$$X^*_{A^*}(\{0\})=\{0\},$$

则T是可分解算子。

证明 因为A是有界可分解算子，由第三章定理1.2知，A是(AC)算子，由命题2.3，T亦是(A)算子。

令$\{K_m\}_{m=1}^{\infty}\subseteq\mathscr{K}$，且$\bigcup_{m=1}^{\infty}K_m=\mathbb{C}_\infty\setminus\{\infty\}$. 由定理2.2；

$$X_T(K_m)=X_A(\Phi(K_m))\quad(m=1,2,\cdots).$$

又$(\Phi(K_m))\in\mathscr{F}$，故$X_T(K_m)=X_A(\Phi(k_m))$皆为闭. 因此$\{X_T(K_m)\}_{m=1}^{\infty}$是$T$的极大空间族，而且由定理3.1，

$$\sigma(T|X_T(K_m))\subseteq\sigma(T)\cap K_m\qquad(m=1,2,\cdots).$$

可见$\sigma(T|X_T(K_m))\in\mathscr{K}(m=1,2,\cdots)$. 为证等式$\bigvee_{m=1}^{\infty}\{X_T(K_m)\}=X$，只须证明

$$\bigvee_{m=1}^{\infty}\{X_A(\Phi(K_m))\}=X.$$

令$F_m=\mathbb{C}\setminus\Phi(K_m)$，由第三章命题5.2，

$$X_A(F_m^c)^{\perp}=X^*_{A^*}(F_m)\quad(m=1,2,\cdots).$$

注意$\bigcap_{m=1}^{\infty}F_m=\{0\}$，由假设

$$\bigcap_{m=1}^{\infty}\{X_A(F_m^c)^{\perp}\}=\bigcap_{m=1}^{\infty}X^*_{A^*}(F_m)=X^*_{A^*}(\bigcap_{m=1}^{\infty}F_m)=\{0\}.$$

于是

$$X={}^{\perp}\left(\bigcap_{m=1}^{\infty}X_A(F_m^c)^{\perp}\right)=\bigvee_{m=1}^{\infty}X_A(F_m^c).$$

因为$F_m^c\subseteq\Phi(K_m)$，所以$X_A(F_m^c)\subseteq X_A(\Phi(K_m))$. 于是$X_A(F_m^c)\subseteq\overline{X}_A(\Phi(K_m))$。因此

$$X=\bigvee_{m=1}^{\infty}\{X_A(\Phi(K_m))\}.$$

可见满足定义4.1之(i)。

设$\{G_k\}_{k=1}^{n}$是$\mathbb{C}_\infty$的任意开复盖，取$\mathbb{C}_\infty$的另一开复盖

$\{D\}_{k=1}^{n}$，使$\bar{D}_k \subseteq G_k (k=1,\cdots,n)$。这样$\{\Phi(D_k)\}_{k=1}^{n}$便是$\sigma(A)$的开复盖。$A$是可分解算子，存在$A$的谱极大空间族$\{Y_k\}_{k=1}^{n}$，使得

$$X=\sum_{k=1}^{n} Y, \sigma(T|Y_k) \subseteq \Phi(D_k) \ (k=1,\cdots,n).$$

由第三章定理1.2知$\{X_A(\Phi(\bar{D}_k))\}_{k=1}^{n}$是$A$的谱极大空间，而且

$$Y_k \subseteq X_A(\Phi(\bar{D}_k)) \qquad (k=1,\cdots,n).$$

于是

$$X=\sum_{k=1}^{n} X_A(\Phi(\bar{D}_k)).$$

由定理 2.2， $X_T(\bar{D}_k)=X_A(\Phi(\bar{D}_k))$，因此

$$X=\sum_{k=1}^{n} X_T(\bar{D}_k).$$

据定理 2.1， T是(A)算子。注意$X_T(\bar{D}_k)$是闭的，故$X_T(\bar{D}_k)$是T的谱极大空间，且

$$\sigma(T|X_T(\bar{D}_k)) \subseteq \bar{D}_k \subseteq G_k \quad (k=1,\cdots,n).$$

这样亦满足定义 4.1 之(ii)，故 T 是可分解算子。

命题 5.2 设$T \in C(X)$是可分解算子，$f(\lambda)$是$\sigma(T)$的邻域G上的解析函数，则$f(T)$是可分解算子。

证明 注意由Riesz-Dunford函数演算知，$f(T) \in \mathscr{B}(X)$．令$\alpha \in G^c \subseteq \rho(T)$， $A=-R(\alpha,T)$， $\mu=\Phi(\lambda)=(\lambda-\alpha)^{-1}$，$\varphi(\mu)=f(\Phi^{-1}(\mu))$， $\mu \in \Phi(G)$，则$\varphi(\mu)$是$\sigma(A)$之邻域上的解析函数，且A是可分解算子。又

$$f(T)=\varphi(A).$$

于是由第三章定理 4.1 知$\varphi(A)$是可分解算子，因此$f(T)$是有界可分解算子。

定理 5.1 设$T \in C(X)$，$f(\lambda)$是$\sigma(T)$之邻域G上的解析函数，且在G与$\sigma(T)$相交的分支上不为常数，如果$f(T)$是可分解算子，且对某个$\alpha \in \rho(T)$，使得

$$A = -R(\alpha, T) \quad X^*_{A^*}(\{0\}) = \{0\},$$

则T是可分解算子。

证明 不妨设$\alpha \in G^c$。令

$\mu = \Phi(\lambda) = (\lambda-\alpha)^{-1}$，$\varphi(\mu) = f(\Phi^{-1}(\mu))$，$\mu \in \Phi(G)$，$\varphi$ 是$\Phi(G) \supseteq \sigma(A)$上的解析函数，且在$\Phi(G)$与$\sigma(A)$相交的分支上不为常数。由Riesz-Dunford函数演算，

$$f(T) = \varphi(A).$$

据第三章定理 4.1 知A是可分解算子，再由命题 5.1知T 是可分解算子。证毕。

我们指出，条件$X^*_{A^*}(\{0\}) = \{0\}$也是T为可分解算子的必要条件。设$T \in C(X)$是可分解算子，由定义 4.1，存在一串闭子集$\{K_m\}_{m=1}^{\infty} \subseteq \mathscr{K}$，使得

$$\bigcup_{m=1}^{\infty} K_m = \mathbb{C} \setminus \{\infty\},$$

而且$\{X_T(K_m)\}_{m=1}^{\infty}$是$T$的谱极大空间族，使得

$$X = \bigvee_{m=1}^{\infty} \{X_T(K_m)\}.$$

由定理 4.3，A是有界可分解算子，且

$$X_T(K_m) = X_A(\Phi(K_m)) \qquad (m = 1, 2, \cdots).$$

注意$0 \notin \Phi(K_m)$，存在开集G_m，使$0 \notin G_m$，且$\Phi(K_m) \subseteq G_m \quad (m = 1, 2, \cdots)$。又

$$\bigcup_{m=1}^{\infty} \Phi(K_m) = \mathbb{C} \setminus \{0\},$$

因此

$$\bigcup_{m=1}^{\infty} G_m = \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

令$F_m = G_m^c$，则$F_m^c \supseteq \Phi(K_m)$，所以

$$X = \bigvee_{m=1}^{\infty} \{X_T(K_m)\} = \bigvee_{m=1}^{\infty} \{X_A(\Phi(K_m))\} = \bigvee_{m=1}^{\infty} \{X_A(F_m^c)\}.$$

从而

$$\{0\}=X^{\perp}=(\bigvee_{m=1}^{\infty}X_A(F_m^c))^{\perp}=\bigcap_{m=1}^{\infty}X_A(F_m^c)^{\perp}.$$

又从第三章命题5.2知，$X_A(F_m)^{c\perp}=X_{A^*}^*(F_m)$．于是

$$\{0\}=\bigcap_{m=1}^{\infty}X_{A^*}^*(F^m)=X_{A^*}^*(\bigcap_{m=1}^{\infty}F_m)=X_{A^*}^*(\{0\}).$$

证毕．

§6 闭可分解算子的谱容度

设$T\in C(X)$是可分解算子，对$F\in\mathscr{F}$，且$F\subseteq$

$$\mathscr{E}(F)=\cap\{Z\,|\,Z\text{是}T\text{的谱极大空间，且}\,\sigma(T|Z)\supseteq F\}.$$

对一般$F\in\mathscr{F}$，令

$$\mathscr{E}(F)=\mathscr{E}(F\cap\sigma(T)).$$

据命题4.5，这个定义是合理的．

命题6.1 设$T\in C(X)$是可分解算子，Y是T的谱极大空间，则

$$Y=\mathscr{E}(\sigma(T_Y)).$$

证明 由于$\sigma(T|Y)\subseteq\sigma(T)$，

$$Y\in\{Z\,|\,Z\text{是}T\text{的谱极大空间，且}\sigma(T|Z)\supseteq\sigma(T_Y)\}.$$

因此

$$Y\supseteq\mathscr{E}(\sigma(T_Y)).$$

另一方面，对一切

$$Z\in\{Z\,|\,Z\text{是}T\text{的谱极大空间，}\sigma(T|Z)\supseteq\sigma(T_Y)\},$$

都有

$$\sigma(T|Z)\supseteq\sigma(T_Y),$$

Z是T的谱极大空间．所以

$$Z\supseteq Y.$$

故

$$\mathscr{E}(\sigma(T_Y))\supseteq Y.$$

因此

$$Y=\mathscr{E}(\sigma(T_Y)).$$

命题6.2 设$T\in C(X)$是可分解算子，则对任何$F\in\mathscr{F}$，$\mathscr{E}(F)$是T的谱极大空间，且

$$\sigma(T|\mathscr{E}(F))\subseteq F,\ F\in\mathscr{F}.$$

证明 令$\lambda\in F^c$，$G\supset F$是开集，且$\lambda\in G^c$。由命题4.5，存在T的谱极大空间Y，得使

$$F\cap\sigma(T)\subseteq\sigma(T|Y)\subseteq G.$$

由$\mathscr{E}(F)$的定义及命题3.2，$\mathscr{E}(F)$是T的谱极大空间，而且

$$Y\supseteq\mathscr{E}(F)=\mathscr{E}(F\cap\sigma(T)).$$

注意

$$\sigma(T|\mathscr{E}(F))\subseteq\sigma(T|Y)\subseteq G,$$

而G包含F是任意的，所以

$$\sigma(T|\mathscr{E}(F))\subseteq\bigcap_{G\supseteq F}G=F.$$

证毕.

命题6.3 设$T\in C(X)$是可分解算子，则

$$\mathscr{E}\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}F_n\right)=\bigcap_{n=1}^{\infty}\mathscr{E}(F_n),\ F_n\in\mathscr{F}\ (n=1,2,\cdots).$$

证明 令$F=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}F_n\in\mathscr{F}$.由$\mathscr{E}(F)$定义以及$F\subseteq F_n$ $(n=1,2,\cdots)$,

$$\mathscr{E}(F)\subseteq\mathscr{E}(F_n)\qquad(n=1,2,\cdots),$$

因此

$$\mathscr{E}(F)\subseteq\bigcap_{n=1}^{\infty}\mathscr{E}(F_n).$$

另一方面，对一切自然数n，由命题6.2,

$$\sigma(T|\mathscr{E}(F_n))\subseteq F_n \quad (n=1,2,\cdots).$$

$\mathscr{E}(F_n)$皆是T的谱极大空间，由命题3.2，$\bigcap_{n=1}^{\infty}\mathscr{E}(F_n)$仍是$T$的谱极大空间，而且由第二章命题1.3，

$$\sigma(T|\bigcap_{n=1}^{\infty}\mathscr{E}(F_n))\subseteq\bigcap_{n=1}^{\infty}\sigma(T|\mathscr{E}(F_n))\subseteq\bigcap_{n=1}^{\infty}F_n=F.$$

因而对每个使$\sigma(T|Y)\supseteq F$的谱极大空间Y，皆有

$$\sigma(T|Y)\supseteq F\supseteq\sigma(T|\bigcap_{n=1}^{\infty}\mathscr{E}(F_n)),$$

于是

$$Y\supseteq\bigcap_{n=1}^{\infty}\mathscr{E}(F_n).$$

从$\mathscr{E}(F)$的定义，

$$\bigcap_{n=1}^{\infty}\mathscr{E}(F_n)\subseteq\mathscr{E}(F).$$

所以

$$\mathscr{E}(\bigcap_{n=1}^{\infty}F_n)=\bigcap_{n=1}^{\infty}\mathscr{E}(F_n).$$

命题6.4 设$T\in C(X)$是可分解算子，则

$$\mathscr{E}(K)\subseteq D(T),\quad K\in\mathscr{K}.$$

证明 令$G\supseteq K$是相对紧开集，由命题4.5，存在T之谱极大空间Y，使

$$K\cap\sigma(T)\subseteq\sigma(T|Y)\subseteq G.$$

由定理2.3可知$Y\subseteq D(T)$。又由命题6.1，

$$\mathscr{E}(\sigma(T|Y))=Y.$$

于是由命题6.3，

$$\mathscr{E}(K)=\mathscr{E}(K\cap\sigma(T))\subseteq\mathscr{E}(\sigma(T|Y))\subseteq D(T).$$

定义6.1 设$\mathscr{E}$是从G_∞的闭子集族$\mathscr{F}$到X的闭线性子空间族$\mathscr{S}(X)$的同态：

$$\mathscr{E}(\cdot): \mathscr{F} \ni F \to \mathscr{E}(F) \in \mathscr{S}(X).$$

称$\mathscr{E}(\cdot)$为闭的谱容度，如果

(i) $\mathscr{E}(\phi)=\{0\}$，$\mathscr{E}(\mathbb{C}_\infty)=X$；

(ii) $\mathscr{E}(\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n) = \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathscr{E}(F_n)$，$F_n \in \mathscr{F}$ $(n=1,2,\cdots)$；

(iii) 对任何$\mathbb{C}_\infty$之开复盖$\{G_k\}_{k=1}^n$，有分解

$$X=\sum_{k=1}^{n} \mathscr{E}(\overline{G}_k);$$

(iv) 存在紧致集族$\{K_k\}_{k=1}^{\infty}$，使得

$$X=\bigvee_{k=1}^{\infty} \mathscr{E}(K_k).$$

定义 6.2 设$T \in C(X)$，称T具有闭谱容度$\mathscr{E}(\cdot)$，如果$\rho(T)$非空，而且

(v) $T[\mathscr{E}(F) \cap D(T)] \subseteq \mathscr{E}(F)$， $F \in \mathscr{F}$；

(vi) $\sigma(T|\mathscr{E}(F)) \subseteq F$， $F \in \mathscr{F}$。

定理 6.1 设$T \in C(X)$是可分解算子，则T具有闭谱容度。

证明 令$\mathscr{E}(.)$如前述：

$$\mathscr{E}(F)=\mathscr{E}(F \cap \sigma(T))$$
$$=\cap\{Z \mid Z\text{是谱极大空间,且}\sigma(T|Z) \supseteq F \cap \sigma(T)\}.$$

容易验证定义 6.1 中的(i)成立：

$$\mathscr{E}(\phi)=\{0\}, \qquad \mathscr{E}(\mathbb{C}_\infty)=X.$$

由命题 6.2，6.3 及 6.4 可知定义 6.1 与 6.2 中的(ii)，(v)，(vi)成立。下面只须证明定义 6.1 中(iii)与(iv)成立。

因为T是可分解算子，存在一串谱极大空间$\{Y_k\}_{k=1}^{\infty}$，使得

$$X=\bigvee_{k=1}^{\infty} Y_k, \quad \sigma(T|Y_k) \in \mathscr{K}, \qquad (k=1,2,\cdots).$$

令$K_k=\sigma(T|Y_k) \in \mathscr{K}$ $(k=1,2,\cdots)$，由命题 6.1，

$$Y_k=\mathscr{E}(K_k) \qquad (k=1,2,\cdots).$$

因此我们有一串紧集$K_k \in \mathscr{B}(k=1,2,\cdots)$，且

$$\bigvee_{k=1}^{\infty}\mathscr{E}(K_k)=X.$$

这样定义 6.1 中的(iv)成立.

设$\{G_k\}_{k=1}^n$是$\mathbb{C}_\infty$的开复盖，由T的可分解性，存在T的谱极大空间$\{Y_k\}_{k=1}^n$，使得

$$X=\sum_{k=1}^{\infty}Y_k,\ \ \sigma(T|Y_k)\subseteq G_k\quad(k=1,2,\cdots,n)$$

注意

$Y_k\subseteq\cap\{Z|Z$是谱极大空间，且$\sigma(T|Z)\supseteq\bar{G}_k\cap\sigma(T)\}$ $(k=1,2,\cdots,n)$. 因此

$$Y_k\subseteq\mathscr{E}(\bar{G}_k\cap\sigma(T))=\mathscr{E}(\bar{G}_k)\quad(k=1,2,\cdots,n).$$

所以

$$X=\sum_{k=1}^{n}\mathscr{E}(\bar{G}_k),$$

因而定义 6.1 的(iii)亦成立.

定义 6.3 设$\mathscr{E}(\cdot)$是闭的谱容度，我们称

$$\text{supp}\mathscr{E}=\cap\{F|F\in\mathscr{F},\ \mathscr{E}(F)=X\}$$

为谱容度$\mathscr{E}(\cdot)$的支集.

命题 6.5 设$T\in C(X)$具有谱容度$\mathscr{E}$，G是开集，而且$G\cap\text{supp}\mathscr{E}\neq\phi$，则$\mathscr{E}(\bar{G})\neq\{0\}$.

证明 取开集H，使$\text{supp}\mathscr{E}\diagdown\bar{H}\neq\phi$,而且使得$\{G,H\}$复盖$\mathbb{C}_\infty$. 据谱容度定义 6.1，

$$X=\mathscr{E}(\bar{G})+\mathscr{E}(\bar{H}).$$

如果$\mathscr{E}(\bar{G})=\{0\}$，则$\mathscr{E}(\bar{H})=X$, 从而$\bar{H}\supseteq\text{supp}\mathscr{E}$，这与$\text{supp}\mathscr{E}\diagdown\bar{H}\neq\phi$矛盾.

命题 6.6 设$T\in C(X)$具有谱容度$\mathscr{E}(\cdot)$，则

$$X=\mathscr{E}(\sigma(T)).$$

证明 令$K=\text{supp}\mathscr{E}$，我们证明$K\subseteq\sigma(T)$. 若不然，存在$\lambda\in K\diagdown\sigma(T)$,因此存在闭圆$F$, 其中心为$\lambda$且与$\sigma(T)$不相交.

由命题 6.5，$\mathscr{E}(F)\neq\{0\}$。又由定义 6.2 的(vi)

$$\sigma(T|\mathscr{E}(F))\cap\sigma(T)\subseteq F\cap\sigma(T)=\phi.$$

这与$\mathscr{E}(F)\neq\{0\}$相矛盾。因此$K\subseteq\sigma(T)$。从而由定义 6.3，

$$X=\mathscr{E}(K)\subseteq\mathscr{E}(\sigma(T))\subseteq X.$$

证毕。

由此不难看出：

$$\sigma(T|\mathscr{E}(F))=\sigma(T|\mathscr{E}(F\cap\sigma(T)))\subseteq F\cap\sigma(T)\subseteq\sigma(T).$$

命题6.7 设$T\in C(X)$具有谱容度$\mathscr{E}$，$\{G_k\}_{k=1}^n$是$\sigma(T)$的开复盖，则存在闭集族$\{F_k\}_{k=1}^n$，使得

$$\sum^n\mathscr{E}(F_k),\ \bar{G}_k\subseteq F_k,\ \sigma(T|\mathscr{E}(F_k))\subseteq\bar{G}_k$$

$$(k=1,2,\cdots,n).$$

证明 做开集H，使得$\mathbb{C}_\infty=(\bigcup_{k=1}^n G_k)\cup H=\bigcup_{k=1}^n(G_k\cup H)$.

而且$\bar{H}\cap\sigma(T)=\phi$. 令$F_k=\bar{G}_k\cup\bar{H}$，由定义 6.1.

$$X=\sum_{k=1}^n\mathscr{E}(F_k).$$

因此

$$\begin{aligned}\sigma(T|\mathscr{E}(F_k))&=\sigma(T|\mathscr{E}(\bar{G}_k\cup\bar{H}))\\&\subseteq(\bar{G}_k\cup\bar{H})\cap\sigma(T)\\&\subseteq\bar{G}_k\qquad(k=1,2,\cdots,n).\end{aligned}$$

完全仿照定理 4.2 的证明，由命题 6.7 可以证明下面这个命题。

命题 6.8 设$T\in C(X)$具有谱容度，则T是(A)算子。

命题 6.9 设$T\in C(X)$具有谱容度$\mathscr{E}$，则T有可分解谱。

证明 令$\{G_k\}_{k=1}^n$是$\sigma(T)$的开复盖，由命题6.7，存在

$$Y_k=\mathscr{E}(F_k),\ F_k\in\mathscr{F}\quad(k=1,2,\cdots,n).$$

使得

$$X=\sum_{k=1}^{n} Y_k,\quad \sigma(T|\mathscr{E}(F_k))\subseteq G_k\cap\sigma(T)\quad (k=1,2,\cdots,n).$$

因此

$$\bigcup_{k=1}^{n}\sigma(T|Y_k)\subseteq\sigma(T).$$

对任何$x\in X$,

$$x=\sum_{k=1}^{n} y_k,\quad y_k\in Y_k\quad (k=1,2,\cdots,n).$$

由命题 6.8及 命题 2.1,

$$\sigma_T(x)\subseteq\bigcup_{k=1}^{n}\sigma_T(y_k)\subseteq\bigcup_{k=1}^{n}\sigma_{T|Y_k}(y_k)\subseteq\bigcup_{k=1}^{n}\sigma(T|Y_k).$$

又据命题 2.2,

$$\sigma(T)=\bigcup_{x\in X}\sigma_T(x)\subseteq\bigcup_{k=1}^{n}\sigma(T|Y_k).$$

证毕.

命题 6.10 设$T\in C(X)$具有谱容度$\mathscr{E}(\cdot)$，则$\mathscr{E}(F)=X$当且仅当$F\supseteq\sigma(T)$.

证明 充分性. 若$F\supseteq\sigma(T)$，由定义 6.1,

$$\mathscr{E}(F)\supseteq\mathscr{E}(F\cap\sigma(T))=\mathscr{E}(\sigma(T)).$$

由命题 6.6，$\mathscr{E}(\sigma(T))=X$，所以

$$\mathscr{E}(F)=X.$$

必要性. 设$\mathscr{E}(F)=X$. 由定义 6.2 之(vi),

$$\sigma(T)=\sigma(T|\mathscr{E}(F))\subseteq F.$$

命题 6.11 设$T\in C(X)$具有谱容度$\mathscr{E}(\cdot)$，则

$$\operatorname{supp}\mathscr{E}=\sigma(T).$$

证明 由命题 6.6，$X=\mathscr{E}(\sigma(T))$，因此

$$\sigma(T)\in\{F|F\in\mathscr{F},\ \mathscr{E}(F)=X\}.$$

这样

$$\cap\{F|F\in\mathscr{F},\ \mathscr{E}(F)=X\}=\operatorname{supp}\mathscr{E}\subseteq\sigma(T).$$

另一方面，由命题 6.10，$\mathscr{E}(F)=X$当且仅当$F\supseteq\sigma(T)$，所以$F\in\{F|F\in\mathscr{F},\ \mathscr{E}(F)=X\}$，从而必有$F\supseteq\sigma(T)$，故

$$\operatorname{supp}\mathscr{E}=\bigcap\{F|F\in\mathscr{F},\ \mathscr{E}(F)=X\}\supseteq\sigma(T).$$

因此

$$\operatorname{supp}\mathscr{E}=\sigma(T).$$

定理 6.2 设$T\in C(X)$具有谱容度$\mathscr{E}(\cdot)$，则T是(AC)算子，且

$$\mathscr{E}(F)=X_T(F),\ F\in\mathscr{F}.$$

证明 由命题 6.8，T是(A)算子。令$G\supseteq F$是开集，选取另一开集H，使得

$$\sigma(T)\subseteq G\cup H,\ F\cap\bar{H}=\phi.$$

因为T具有谱容度，所以

$$X=\mathscr{E}(\bar{G})+\mathscr{E}(\bar{H}),\sigma(T|\mathscr{E}(\bar{G}))\subseteq\bar{G},\ \sigma(T|\mathscr{E}(\bar{H}))\subseteq\bar{H}.$$

令$x\in X_T(F)$，于是

$$x=y+z,\ y\in\mathscr{E}(\bar{G}),\ z\in\mathscr{E}(\bar{H}).$$

令$\lambda\in F^c\cap\rho(T|\mathscr{E}(\bar{H}))$，我们有

$$(\lambda I-T)[\tilde{x}(\lambda)-R(\lambda,T|\mathscr{E}(\bar{H}))z]=x-z=y,$$

其中$\tilde{x}(\lambda)$是$R(\lambda,T)x$的最大解析扩张。因为函数

$$(\ )=\tilde{x}(\lambda)-R(\lambda,T|\mathscr{E}(\bar{H}))z$$

在$F^c\cap\rho(T|\mathscr{E}(\bar{H}))$上解析，由上式可见，$\lambda\in\rho_T(y)$，从而

$$\sigma_T(y)\subseteq F\cup\sigma(T|\mathscr{E}(\bar{H}))\subseteq F\cap\bar{H}.$$

令Γ是位于$F^c\cap\bar{H}^c$内围绕F的Cauchy围道．若$F=\phi$或$\mathbb{C}_\infty$，由定义 6.1 及$X_T(\cdot)$的定义．

$$\mathscr{E}(F)=X_T(F).$$

因此不妨令$F\neq\phi$，$\mathbb{C}_\infty$．于是存在$\lambda_0\notin F$，使得

$$\operatorname{dist}(\lambda_0,F)>0.$$

令$f_0(\lambda)=(\lambda-\lambda_0)^{-1}$，当$\lambda_0\notin G$，则$f_0(\lambda)$是$G\supseteq F\supseteq\sigma_T(x)$上的解析函数，且$\bar{H}^c\subseteq G$，因而

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\tilde{y}(\lambda)f_0(\lambda)d\lambda$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\tilde{x}(\lambda)f_0(\lambda)d\lambda-\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}R(\lambda,T|\mathscr{E}(\bar{H}))zf_0(\lambda)d\lambda.$$

注意

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\tilde{y}(\lambda)f_0(\lambda)d\lambda\in\mathscr{E}(\bar{G}),\ \bar{H}^c\subseteq\rho(T|\mathscr{E}(\bar{H})),$$

而且$f_0(\lambda)$在$\bar{H}^c$上亦解析。从而

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}R(\lambda,T|\mathscr{E}(\bar{H}))zf_0(\lambda)d\lambda=0.$$

因此

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\tilde{x}(\lambda)f_0(\lambda)d\lambda=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\tilde{y}(\lambda)f_0(\lambda)d\lambda\in\mathscr{E}(\bar{G}),$$

但是$\sigma_T(x)\subseteq F$，Γ是包含$\sigma_T(x)$的围道，由函数演算，

$$(\lambda_0I-T)^{-1}x=df_0(\infty)x+\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\tilde{x}(\lambda)f_0(\lambda)d\lambda$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\tilde{x}(\lambda)f_0(\lambda)d\lambda.$$

此处$\delta=0$或1视$f_0(\lambda)$在$\lambda=\infty$处的性质而定。这样，

$$(\lambda_0I-T)^{-1}x\in\mathscr{E}(\bar{G}).$$

因此$x\in(\lambda_0I-T)\mathscr{E}(\bar{G})\subseteq\mathscr{E}(\bar{G})$，所以$X_T(F)\subseteq\mathscr{E}(\bar{G})$。我们取一串开集$\{G_k\}_{k=1}^{\infty}$，且使$\bigcap_{k=1}^{\infty}\bar{G}_k=F$，于是

$$X_T(F)\subseteq\bigcap_{k=1}^{\infty}\mathscr{E}(\bar{G}_k)=\mathscr{E}(\bigcap_{k=1}^{\infty}\bar{G}_k)=\mathscr{E}(F),$$

另一方面，若$x\in\mathscr{E}(F)$，由定义 6.2

$$\sigma_T(x)\subseteq\sigma_{T|\mathscr{E}(F)}(x)\subseteq\sigma(T|\mathscr{E}(F))\subseteq F.$$

因而$x\in X_T(F)$，或者$\mathscr{E}(F)\subseteq X_T(F)$。总之

$$\mathscr{E}(F)=X_T(F),\ F\in\mathscr{F}.$$

定理 6.3 设$T\in C(X)$具有谱容度，则T是闭可分解算子.

证明 由命题 6.9，T是有可分解谱的算子，因此对$\sigma(T)$的任何开复盖$\{G_k\}_{k=1}^n$，存在$\{\mathscr{E}(F_k)\}_{k=1}^n$，使得

$$X=\sum_{k=1}^n \mathscr{E}(F_k),\ F_k\in\mathscr{F},\sigma(T|\mathscr{E}(F_k))\subseteq\bar{G}_k$$

$$(k=1,2,\cdots,n).$$

由定理 6.2，$\mathscr{E}(F_k)=X_T(F_k)\ (k=1,2,\cdots,n)$. 因此

$$X=\sum_{k=1}^n X_T(F_k),\ \sigma(T|X_T(F_k))\subseteq\bar{G}_k\quad(k=1,2,\cdots,n).$$

这就证明了定义 4.1 之(ii).

由谱容度定义 6.2 知，存在一串紧致集$\{K_k\}_{k=1}^\infty$，使得

$$X=\bigvee_{k=1}^\infty \mathscr{E}(K_k),\ K_k\in\mathscr{K}\qquad(k=1,2,\cdots),$$

再由定理 6.2，$\mathscr{E}(K_k)=X_T(K_k)$是谱极大空间，故

$$X=\bigvee_{k=1}^\infty X_T(K_k),\ \text{且}\sigma(T|X_T(K_k))\in\mathscr{K}$$

$$(k=1,2,\cdots).$$

这说明定义 4.1 之(i)成立. 总之T是闭可分解算子. 证毕.

这样我们也证明了下面的定理.

定理 6.4 $T\in C(X)$是可分解算子当且仅当T具有谱容度.

§7 闭强可分解算子

定义 7.1 设$T\in C(X)$，$\rho(T)$非空. 我们称T是闭强可分解算子，如果对$\sigma(T)$的任意有限开复盖$\{G_k\}_{k=1}^n$及T的每个谱极大空间Y,

(i) 存在T的谱极大空间族$\{Y_k\}_{k=1}^\infty$，使得

$$Y=\sum_{k=1}^{n}Y_K\cap Y,\ \sigma(T|Y_k)\in\mathscr{K}(k=1,2,\cdots),$$

(ii) 存在T的谱极大空间$\{Y_k\}_{k=1}^{n}$，使得

$$Y=\sum_{k=1}^{n}Y_k\cap Y,\ \sigma(T|Y_k)\subseteq G_k\qquad(k=1,2,\cdots,n).$$

由定义不难看出，若$Y=X$，则T是闭可分解算子，因此闭强可分解算子必是闭可分解算子。当T是有界线性算子时，闭强可分解算子便成为有界强可分解算子。

定义 7.2 从$\mathscr{C}_\infty$中闭子集族$\mathscr{F}$到X的闭线性子空间族$\mathscr{S}(X)$的映射$\mathscr{E}(\cdot):\mathscr{F}\to\mathscr{S}(X)$称为**强谱容度**，如果它满足下述条件:

(i) $\mathscr{E}(\phi)=\{0\}$，$\mathscr{E}(\mathscr{C}_\infty)=X$;

(ii) $\mathscr{E}(\bigcap_{k=1}^{\infty}F_k)=\bigcap_{k=1}^{\infty}\mathscr{E}(F_k)$，$F_k\in\mathscr{K}\quad(k=1,2,\cdots)$;

(iii) 对任何$F\in\mathscr{F}$，以及F的有限开盖复$\{G_k\}_{k=1}^{n}$，有等式

$$\mathscr{E}(F)=\sum_{k=1}^{\infty}\mathscr{E}(F\cap\bar{G}_k);$$

(iv) 对任何$F\in\mathscr{F}$，存在非降列$\{K_k\}_{k=1}^{\infty}\subseteq\mathscr{K}$，使得

$$\mathscr{E}(F)=\bigvee_{k=1}^{\infty}\mathscr{E}(K_k).$$

定义 7.3 设$T\in C(X)$具有非空预解集，称T具有强谱容度$\mathscr{E}(\cdot)$，如果

(v) $T(\mathscr{E}(F)\cap D(T))\subseteq\mathscr{E}(F)$,

(vi) $\sigma(T|\mathscr{E}(F))\subseteq F$，$F\in\mathscr{F}$.

定理 7.1 设$T\in C(X)$，则T是闭强可分解算子当且仅当对T的任意谱极大空间Y，T_Y是Y上的闭可分解算子。

证明 必要性。令$\{G_k\}_{k=1}^{n}$是$\sigma(T_Y)$的有限开复盖，又G_0是开集，使$\bar{C}_0\cap\sigma(T_Y)=\phi$，而且$\{G_k\}_{k=0}^{n}$构成$\sigma(T)$的有限开复盖。由定义7.1，存在$T$的谱极大空间$\{Y_k\}_{k=0}^{n}$，使得

$$Y=\sum_{k=0}^{n} Y_k \cap Y, \quad \sigma(T|Y_k) \subseteq G_k \quad (k=0,1,2,\cdots,n).$$

由命题 3.2 ,$Z_k=Y\cap Y_k(k=0,1,2,\cdots,n)$是$T$的谱极大空间，而且$Z_K$亦是$T_Y$的谱极大空间。由命题 3.3 不难进一步证明

$$\sigma(T_Y|Z_0)=\sigma(T|Y\cap Z_0)\subseteq\sigma(T_Y)\cap\sigma(T|Z_0)$$

$$\subseteq\bar{G}_0\cap\sigma(T_Y)=\phi.$$

因此，$Z_0=\{0\}$. 又

$$\begin{aligned}\sigma(T_Y|Z_k)&=\sigma(T|Y\cap Z_k)\\&=\sigma(T|Z_k)\\&=\sigma(T|Y\cap Y_k)\\&\subseteq\sigma(T_Y)\cap\sigma(T|Y_k)\\&\subseteq G_k\cap\sigma(T_Y)\\&\subseteq G_k \qquad (k=1,2,\cdots,n).\end{aligned}$$

所以存在T_Y的谱极大空间$\{Z_k\}_{k=1}^{n}$，使得

$$Y=\sum_{k=1}^{n} Z_k, \quad \sigma(T_Y|Z_k)\subseteq G_k \quad (k=1,2,\cdots,n).$$

再证T_Y满足定义 4.1 之(i)。由于T是闭强可分解算子，由定义 7.1 中的(i)，存在T之谱极大空间族$\{Y_k\}_{k=1}^{\infty}$，使得

$$Y=\bigvee_{k=1}^{\infty} Y\cap Y_k, \quad \sigma(T|Y_k)\in\mathscr{K} \quad (k=1,2,\cdots).$$

$Z_k=Y\cap Y_k$是T_Y的谱极大空间，而且

$$\begin{aligned}\sigma(T_Y|Z_k)&=\sigma(T|Y\cap Y_k)\\&\subseteq\sigma(T_Y)\cap\sigma(T|Y_k)\\&\subseteq\sigma(T_{Y_k}) \quad (k=1,2,\cdots),\end{aligned}$$

故$\sigma(T_Y|Z_k)\in\mathscr{K}$ $(k=1,2,\cdots)$.这样存在T_Y的谱极大空间族$\{Z_k\}_{k=1}^{\infty}$，使得

$$Y=\bigvee_{k=1}^{\infty} Z_k, \quad \sigma(T_Y|Z_k)\in\mathscr{K} \quad (k=1,2,\cdots).$$

从定义 4.1 知$T_Y\in C(Y)$是可分解算子。

充分性。令Y是T的谱极大空间，又$T_Y=T|Y$是Y上闭可分解算子。令$\{G_k\}_{k=1}^n$是$\sigma(T)$的开复盖。由于T_Y是可分解算子，由定义4.1，存在T_Y的谱极大空间$\{Y_k\}_{k=1}^{\infty}$，$Y_k\subseteq Y$ $(k=1,2,\cdots)$，使得

$$Y=\bigvee_{k=1}^{\infty} Y_k,\ \sigma(T_Y|Y_k)\in\mathscr{K}\quad (k=1,2,\cdots).$$

由命题3.3，Y_k是T的谱极大空间，$Y_k=Y_k\cap Y$，所以

$$Y=\bigvee_{k=1}^{\infty} Y_k\cap Y.$$

而且

$$\sigma(T|Y_k)=\sigma(T|Y\cap Y_k)=\sigma(T_Y|Y_k)\in\mathscr{K}\quad (k=1,2,\cdots).$$

再证T满足定义7.1之(ii)。令G_0是开集，且$G_0\cap\sigma(T)=\phi$，使$\{G_k\}_{k=0}^n$复盖$\sigma(T_Y)$。由定义4.1，存在T_Y的谱极大空间族$\{Y_k\}_{k=0}^n$，$Y_k\subseteq Y$ $(k=0,1,2,\cdots,n)$，使得

$$Y=\sum_{k=0}^{n} Y_k,\ \sigma(T_Y|Y_k)\subseteq G_k\quad (k=0,1,2,\cdots,n).$$

由命题3.3，$Y_k=Y_k\cap Y$是T的谱极大空间，因此

$$Y=\sum_{k=0}^{n} Y_k\cap Y.$$

又知

$$\sigma(T|Y_k)=\sigma(T|Y\cap Y_k)=\sigma(T_Y|Y_k)\subseteq G_k\quad (k=0,1,2,\cdots,n).$$

注意到

$$\begin{aligned}\sigma(T|Y_0)&=\sigma(T|Y\cap Y_0)\\&\subseteq\sigma(T_Y)\cap\sigma(T|Y_0)\\&\subseteq G_0\cap\sigma(T_Y)\\&\subseteq G_0\cap\sigma(T)\\&=\phi.\end{aligned}$$

因而

$$Y \cap Y_0 = \{0\}.$$

这样，

$$Y = \sum_{k=1}^{n} Y \cap Y_k, \sigma(T|Y_k) \subseteq G_k \quad (k=1,2,\cdots,n).$$

推论 设$T \in C(X)$是强可分解算子，Y是T的谱极大空间，且$\sigma(T|Y) \in \mathscr{K}$，则$T_Y \in \mathscr{B}(Y)$是有界可分解算子。

这由定理2.3及定理7.1不难证明。

定理7.2 设$T \in C(X)$，则T是强可分解算子当且仅当T具有强谱容度。

证明 必要性。强可分解算子亦是可分解算子，由定理.1，T具有谱容度$\mathscr{E}$，因此只须证明T满足定义7.2中的(iii)与(iv)。

先证满足(iii)。由定理6.2，对每个$F \in \mathscr{F}$，$\mathscr{E}(F)$是T的谱极大空间，而且$\mathscr{E}(F) = X_T(F)$。因此

$$\sigma(T|\mathscr{E}(F)) \subseteq F, \quad F \in \mathscr{F}.$$

可见若$\{G_k\}_{k=1}^{n}$是F的开复盖，则$\{G_k\}_{k=1}^{n}$必是$\sigma(T|\mathscr{E}(F))$的开复盖。作开集G_0，使得$\{G_k\}_{k=0}^{n}$是$\sigma(T)$的开复盖，且

$$\bar{G}_0 \cap \sigma(T|\mathscr{E}(F)) = \phi.$$

由定义7.1，存在T的谱极大空间$\{Y_k\}_{k=0}^{n}$，使得

$$\mathscr{E}(F) = \sum_{k=0}^{n} \mathscr{E}(F) \cap Y_k, \ \sigma(T|Y_k) \subseteq G_k \ (k=0,1,2,\cdots,n).$$

由于

$$\begin{aligned}\sigma(T|\mathscr{E}(F) \cap Y_0) &\subseteq \sigma(T|\mathscr{E}(F)) \cap \sigma(T|Y_0) \\ &\subseteq \bar{G}_0 \cap \sigma(T|\mathscr{E}(F)) = \phi,\end{aligned}$$

所以

$$\mathscr{E}(F) \cap Y_0 = \{0\}.$$

这样，

$$\mathscr{E}(F) = \sum_{k=1}^{n} \mathscr{E}(F) \cap Y_k, \ \sigma(T|Y_k) \subseteq G_k \quad (k=1,2,\cdots,n).$$

由命题 6.1，

$$Y_k=\mathscr{E}(\sigma(T|Y_k)) \qquad (k=1,2,\cdots,n).$$

因此

$$\mathscr{E}(\sigma(T|Y_k)\subseteq\mathscr{E}(\bar{G}_k) \qquad (k=1,2,\cdots,n).$$

从而$Y_k\subseteq\mathscr{E}(\bar{G}_k)(k=1,2,\cdots,n)$. 由定义 6.1，

$$\mathscr{E}(F)=\sum_{k=1}^{n}\mathscr{E}(F)\cap\mathscr{E}(\bar{G}_k)=\sum_{k=1}^{n}\mathscr{E}(F\cap\bar{G}_k).$$

其次证明满足(iv). 由于T是强可分解算子，据定义 7.1，对任何$F\in\mathscr{F}$，存在T的谱极大空间$\{Y_k\}_{k=1}^{\infty}$，使得$\sigma(T|Y_k)\in\mathscr{K}$ $(k=1,2,\cdots)$，且

$$\bigvee_{k=1}^{\infty}\mathscr{E}(F)\cap Y_k=\mathscr{E}(F), \qquad F\in\mathscr{F}$$

如前，

$$Y_k=\mathscr{E}(\sigma(T|Y_k)) \quad (k=1,2,\cdots).$$

令$F_k=\sigma(T|Y_k)$ $(k=1,2,\cdots)$，

$$\mathscr{E}(F)=\bigvee_{k=1}^{\infty}\mathscr{E}(F)\cap\mathscr{E}(F_k)$$

$$=\bigvee_{k=1}^{\infty}\mathscr{E}(F\cap F_k)$$

再令$K_k=F\cap F_k\in\mathscr{K}$ $(k=1,2,\cdots)$，且

$$\mathscr{E}(F)=\bigvee_{k=1}^{\infty}\mathscr{E}(K_k), \qquad K_k\in\mathscr{K} \quad (k=1,2,\cdots).$$

最后证明充分性. 设T具有强谱容度$(\cdot)\mathscr{E}$. 强谱容度也是定义 6.1，6.2中的谱容度，由定理 6.4，T是可分解算子. 对T的谱极大空间Y，由命题 6.1，

$$Y=\mathscr{E}(\sigma(T_Y)).$$

由定义 7.2，对$\sigma(T_Y)\in\mathscr{F}$，存在$\{K_k\}_{k=1}^{\infty}\subseteq\mathscr{K}$，使得

$$Y=\mathscr{E}(\sigma(T_Y))=\bigvee_{k=1}^{\infty}\mathscr{E}(K_k).$$

由定理 6.2，$\mathscr{E}(K_k)=Y_k$是T的谱极大空间，又

$$\sigma(T|Y_k)=\sigma(T|\mathscr{E}(K_k))\subseteq K_K \quad (k=1,2,\cdots).$$

这样，

$$Y=\bigvee_{k=1}^{\infty} Y\cap Y_k,\ \sigma(T|Y_k)\in\mathscr{K}\ \ (k=1,2,\cdots).$$

其次．令$\{G_k\}_{k=1}^n$是$\sigma(T)$的开复盖，Y是T的谱极大空间，注意

$$F=\sigma(T|Y)\subseteq\sigma(T|\mathscr{E}(\sigma(T|Y)))\subseteq\sigma(T),$$

因此$\{G_k\}_{k=1}^n$必复盖F．由定义 7.2，

$$Y=\mathscr{E}(\sigma(T_Y))=\sum_{k=1}^{n}\mathscr{E}(\sigma(T_Y)\cap\bar{G}_k).$$

又知

$$\begin{aligned}\mathscr{E}(\sigma(T_Y)\cap\bar{G}_k)&=\mathscr{E}(\sigma(T_Y))\cap\mathscr{E}(\bar{G}_k)\\&=Y\cap Y_k\qquad(k=1,2,\cdots,n).\end{aligned}$$

其中$Y=\mathscr{E}(\sigma(T_Y))$，$Y_k=\mathscr{E}(\bar{G}_k)$ $(k=1,2,\cdots,n)$．Y_k是T的谱极大空间，由等式

$$Y=\sum_{k=1}^{n}Y\cap Y_k,\ \sigma(T|Y_k)\subseteq\bar{G}_k\quad(k=1,2,\cdots,n),$$

可知T满足定义 7.1 之(ii)．

§8 闭商算子的可分解性

我们考虑闭算子的商算子．

设$T\in C(X)$，$Y\in\mathrm{Lat}T$．令

$D(T^Y)=\{\hat{x}|\hat{x}\in X/Y,\ \hat{x}\cap D(T)\neq\phi\}$．

对于$\hat{x}\in D(TY)$，$x\in\hat{x}\cap D(T)$，定义

$$T^Y\hat{x}=\widehat{Tx},$$

则T^Y称为闭算子T在商空间$X/_Y$诱导出来的商算子．T^Y何时为闭算子呢？可以证明：

命题 8.1 设$T\in C(X)$，$Y\in\mathrm{Lat}T$，且$\sigma(T)\cup\sigma(T_Y)\neq\mathbb{C}_\infty$，

则$T^Y \in C(X/Y)$.

证明 因为$\rho(T)\cap\rho(T_Y)$是非空开集，存在有限的$\lambda\in\rho(T)\cap\rho(T_Y)$. 先考虑$\lambda=0$的情况。对$T$的定义域$D(T)$赋予图形范数

$$\|x\|_T=\|x\|+\|Tx\|,\quad x\in D(T)$$

因为T是闭的，故$D\triangleq(D(T),\|\cdot\|_T)$是Banach空间。显然，$Z=Y\cap D(T)\subseteq D$，且是$D$的闭子空间，所以$D/Z$是Banach商空间，具有范数

$$\|\hat{x}\|_{D/Z}=\inf_{z\in Z}\|x+z\|_T$$

由假设 $0\in\rho(T)\cap\rho(T_Y)$，因此

$$\begin{aligned}\|x\|_{D/Z}&=\inf_{z\in Z}[\|x+z\|+\|Tx+Tz\|]\\&=\inf_{y\in Y}[\|x+T^{-1}y\|+\|Tx+y\|]\\&=\inf_{y\in Y}[\|T^{-1}(Tx+y)\|+\|Tx+y\|]\\&\leqslant[\|T^{-1}\|+1]\inf_{y\in Y}\|Tx+y\|.\end{aligned}$$

即

$$\|\hat{x}\|_{D/Z}\leqslant[\|T^{-1}\|+1]\inf_{y\in Y}\|Tx+y\|,\qquad x\in D(T).$$

再对T^Y的定义域$D(T^Y)$赋以图形范数

$$\|\tilde{x}\|_{T^Y}\triangleq\|\tilde{x}\|+\|T^Y\tilde{x}\|=\inf_{y\in Y}\|x+y\|+\inf_{y\in Y}\|Tx+y\|.$$

因此

$$D_{T^Y}\triangleq(D(T^Y),\ \|\cdot\|_{T^Y})$$

在上述范数下构成赋范线性空间。下面证明D_{T^Y}是Banach空间。

令$\{\tilde{x}_n\}_{n=1}^{\infty}$是$D_{T^Y}$中的Cauchy列，$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\subseteq D(T)$，由前述不等式$\{\hat{x}_n\}_{n=1}^{\infty}$是$D/Z$中的Cauchy列，而$D/Z$是完备的，存在$x\in D(T)$，$\hat{x}\in D/Z$，使得

$$\|\hat{x}_n-\hat{x}\|\quad\to0\quad(n\to\infty).$$

于是 $\tilde{x}\in D(T^Y)$，且

$$\|\tilde{x}_n-\tilde{x}\|_{T^Y}=\inf_{y\in Y}\|x_n-x+y\|+\inf_{y\in Y}\|Tx_n-Tx+y\|$$

$$\leqslant\inf_{y\in Y}\|x_n-x+y\|+\inf_{y\in Z}\|Tx_n-Tx+Ty\|$$

$$\leqslant\inf_{y\in Z}[\|x_n-x+y\|+\|Tx_n-Tx+Ty\|]$$

$$=\|\hat{x}_n-\hat{x}\|_{D/Z}\to 0 \qquad (n\to\infty)$$

故D_{T^Y}是Banach空间。

如果 $\|\tilde{x}_n-\tilde{x}\|+\|T^Y\tilde{x}_n-\tilde{w}\|\to 0$ $(n\to\infty)$，其中$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\subseteq D(T)$，则$\{\tilde{x}_n\}_{n=1}^{\infty}$是$D_{T^Y}$中 Cauchy 列。由于$D_{T^Y}$完备，从而$\tilde{x}\in D(T^Y)$，且

$$T^Y\tilde{x}=\tilde{w}.$$

既$T^Y\in C(X/Y)$.

最后，若$\lambda\neq 0$，则$0\in\rho(\lambda I-T)\cap\rho(\lambda I-T_Y)$，由前证$\lambda I-T^Y\in C(X/Y)$，因此$T^Y\in C(X/Y)$。证毕。

如果$Y\subseteq D(T)$，则$T^Y\in C(X/Y)$。

命题 8.2 设$T\in C(X)$，$Y\in \mathrm{Lat}T$，且$Y\subseteq D(T)$，则

(i) $\sigma(T)\subseteq\sigma(T_Y)\cup\sigma(T^Y)$；

(ii) $\sigma(T_Y)\subseteq\sigma(T)\cup\sigma(T^Y)$；

(iii) $\sigma(T^Y\subseteq\sigma(T)\cup\sigma(T_Y)$.

证明 (i)令 $\lambda\in\rho(T_Y)\cap\rho(T^Y)$，$x\in D(T)$，且

$$(\lambda I-T)x=0.$$

于是$\hat{x}\cap D(T)\neq\phi$。因此

$$(\lambda I-T^Y)\hat{x}=\hat{0}.$$

$\lambda\in\rho(T^Y)$，所以$\hat{x}=0$。那么$x\in Y\subseteq D(T)$，从而

$$(\lambda I-T|Y)x=(\lambda I-T)x=0.$$

但 $\lambda\in\rho(T_Y)$，所以 $x=0$，即$\lambda I-T$是单射的。

又令$x\in X$，$\hat{x}\in X/Y$。由于$\lambda\in\rho(T^Y)$，故存在$\hat{y}\in D(T^Y)$，使得

$$(\lambda I-T^Y)\hat{y}=\hat{x}.$$

取$y\in D(T)\cap\hat{y}$，于是

$$(\lambda I-T)y-x\in Y.$$

又$\lambda\in\rho(T_Y)$，因此，

$$z=R(\lambda,T|Y)[(\lambda I-T)y-x]\in Y\subseteq D(T)$$

有意义。这样

$$(\lambda I-T)z=(\lambda I-T)y-x,$$

或者

$$(\lambda I-T)(y-z)=x.$$

故$\lambda I-T$是满射的，既有$\lambda\in\rho(T)$。

至于(ii)与(iii)的证明可类似给出。

推论 设$T\in C(X)$，$Y\in \mathrm{Lat}T$，且$Y\subseteq D(T)$，则$\sigma(T_Y)\subseteq\sigma(T)$当且仅当$\sigma(T^Y)\subseteq\sigma(T)$。

这由命题 8.2 的(ii)与(iii)不难给出证明。

命题 8.3 设$T\in C(X)$，Y是 T 的解析不变子空间。则$T^Y\in C(X/_Y)$。

证明 由定义 2.4 后注记，$\sigma(T_Y)\subseteq\sigma(T)$，于是

$$\sigma(T)\cup\sigma(T_Y)\subseteq\sigma(T).$$

我们已假定对$T\in C(X)$，$\rho(T)\neq\phi$，因此必有$\sigma(T)\neq\mathbb{C}_\infty$，于是，$\sigma(T)\cup\sigma(T_Y)\neq\mathbb{C}_\infty$。据命题 8.1，$T^Y\in C(X/^Y)$

命题 8.4 设$T\in C(X)$，$Y\subseteq D(T)$是T的解析不变子空间．又设$g(\lambda)$：$U(\lambda_0)\to D(T^Y)$是解析函数，且$(\lambda I-T^Y)g(\lambda)=\hat{x}$，$\lambda\in U(\lambda_0)\setminus\{\infty\}$，其中$U(\lambda_0)$是$\lambda_0\in\mathbb{C}_\infty$的邻域。则存在邻域$V(\lambda_0)\subseteq U(\lambda_0)$及解析函数$h(\lambda)$：$V(\lambda_0)\to D(T)$，使得$\widehat{h(\lambda)}=g(\lambda)$，$\lambda\in V(\lambda_0)$，且$(\lambda I-T)h(\lambda)$亦是$V(\lambda_0)$到$X$的解析函数。

证明 注意$D(T^Y)$在图形范数$\|\cdot\|_{T^Y}$下是Banach空间，并且对任意$\hat{x}\in D(T^Y)$，皆有

$$\|\hat{x}\|_{T^Y}\leqslant\|\hat{x}\|_{D/Y}$$

由Bamach空间范数比较定理，$\|\cdot\|_{T^Y}$与$\|\cdot\|_{D/Y}$是等价的。对于$\in U(\lambda_0)\setminus\{\infty\}$，我们有

$$T^Y g(\lambda)=\lambda g(\lambda)-\hat{x}.$$

若λ_0是有限的，可以设$U(\lambda_0)\subseteq \mathbb{C}_\infty$。这样，$T^Y g(\lambda)$是从$U(\lambda_0)$到 Banach 空间$(D(T^Y),\|\cdot\|_{T^Y})$的解析函数。又$g(\lambda)$：$U(\lambda_0)\to D(T^Y)$是解析函数，或者说$g(\lambda)$：$U(\lambda_0)\to D/Y$是解析函数．因此存在$\lambda_0$的邻域$V(\lambda_0)\subseteq U(\lambda_0)$，及解析函数$h(\lambda)$：$V(\lambda_0)\to D$，使得$\widehat{h(\lambda)}=g(\lambda)$，$\lambda\in V(\lambda_0)$．由于$V(\lambda_0)\subseteq \mathbb{C}$，故$(\lambda-T)h(\lambda)$亦是从$V(\lambda_0)$到$X$的解析函数。

若$\lambda_0=\infty$，这时$\lambda g(\lambda)$亦是解析函数，从而$T^Y g(\lambda)$在$U(\lambda_0)$上是解析函数。同前$g(\lambda)$：$U(\lambda_0)\to D/Y$是解析函数因为$g(\infty)=0$，因此，存在$V(\lambda_0)\subseteq U(\lambda_0)$，使级数

$$g(\lambda)=\sum_{k=1}^{\infty}\hat{a}_k\lambda^{-k},\qquad \lambda\in V(\lambda_0)$$

按D/Y范数收敛．因为$\|\hat{a}_k\|_{D/Y}\leqslant M^k\ (k=1,2,\cdots)$．对某$M>0$，存在$a_k\in\hat{a}_k$，使得

$$\|a_k\|_T\leqslant(M+1)^k\qquad (k=1,2,\cdots).$$

因此级数

$$h(\lambda)=\sum_{k=1}^{\infty}a_k\lambda^{-k}$$

在$V(\lambda_0)$上按D的范数收敛。这样，$h(\lambda)$：$V(\lambda_0)\to D$是解析函数且$\widehat{h(\lambda)}=g(\lambda)$，$\lambda\in V(\lambda_0)$，又$\lambda h(\lambda)$仍是$V(\lambda_0)$上的解析函数，这样$(\lambda I-T)h(\lambda)$亦是从$V(\lambda_0)$到$X$的解析函数。

定理 8.1 $Y\subseteq D(T)$是T的解析不变子空间当且仅当T^Y有性质(A)。

证明 充分性。设$f(\lambda)$：$G\to D(T)$是解析函数，且$(\lambda I-T)f(\lambda)\in Y$，$\lambda\in G$，$G\subseteq\mathbb{C}_\infty$是开集，于是，$\hat{f}(\lambda)=\widehat{f(\lambda)}$是从$G$到$D(T^Y)$的解析函数，而且

$$(\lambda I-T^Y)\hat{f}(\lambda)=\widehat{(\lambda I-T)f(\lambda)}=0,\ \lambda\in G.$$

T^Y有性质(A)，故$\hat{f}(\lambda)=\hat{0}$，$\lambda\in G$。这样，

$$f(\lambda)\in Y,\ \lambda\in G.$$

必要性。令$\hat{f}(\lambda)$：$G\to D(T^Y)$是解析函数，使得

$$(\lambda I-T^Y)\hat{f}(\lambda)=\hat{0},\ \lambda\in G.$$

不妨设$G\subseteq \mathbb{C}_\infty$是连通的。由命题8.4，存在$U\subseteq G$及解析函数$f(\lambda)$：$U\to D(T)$，使得$\hat{f}(\lambda)=\widehat{f(\lambda)}$，$\lambda\in U$. 于是

$$\widehat{(\lambda I-T)f(\lambda)}=(\lambda I-T^Y)(\hat{f}(\lambda))=\hat{0},\quad \lambda\in U.$$

因此

$$(\lambda I-T)f(\lambda)\in Y,\ \lambda\in U.$$

由解析延拓，$(\lambda I-T)\lambda(\lambda)\in Y$，$\lambda\in G$，又$Y$是$T$的解析不变子空间，故$f(\lambda)\in Y,\lambda\in Y$，因此

$$\hat{f}(\lambda)=\widehat{f(\lambda)}=\hat{0},\ \lambda\in G.$$

定理 8.2 设$T\in C(X)$是(A)算子，$Y\subseteq D(T)$是T的解析不变子空间，则

$$\sigma_T(x)=[\sigma_T(x)\cap\sigma(T_Y)]\cup\sigma_{T^Y}(\hat{x}),\ \hat{x}\in X/Y,\ x\in\hat{x}.$$

证明 令$\lambda\in\rho_T(x)$，存在解析函数$\tilde{x}(\lambda)$：$\rho_T(x)\to D(T)$，使得

$$(\lambda I-T)\tilde{x}(\lambda)=x.$$

令$\hat{x}(\lambda)=\widehat{x(\lambda)}$，则$\hat{x}(\lambda)$：$\rho_T(x)\to D(T^Y)$是解析函数，而且

$$(\lambda I-T^Y)\hat{x}(\lambda)=\widehat{(\lambda I-T)x(\lambda)}=\hat{x},\quad \lambda\in\rho_T(x).$$

故$\rho_T(x)\subseteq\rho_{T^Y}(\hat{x})$，或者$\sigma_{T^Y}(\hat{x})\subseteq\sigma_T(x)$，$x\in\hat{x}$。因此

$$[\sigma_T(x)\cap\sigma(T_Y)]\cup\sigma_{T^Y}(\hat{x})\subseteq\sigma_T(x),\ x\in\hat{x}.$$

另方面，令$\lambda_0\in\rho_{T^Y}(\hat{x})\cap\rho(T_Y)$，存在解析函数$\hat{x}(\lambda)$：$\rho_{T^Y}(\hat{x})\to D(T^Y)$，使得

$$(\lambda I-T^Y)\hat{x}(\lambda)=\hat{x}.$$

由命题8.4，存在λ_0之邻域$U(\lambda_0)\subseteq\rho_{T^Y}(\hat{x})\cap\rho(T_Y)$，及其上的解析函数$x(\lambda)$，使得$\hat{x}(\lambda)=\widehat{x(\lambda)}$，$\lambda\in U(\lambda_0)$。从而

$$(\lambda I-T)x(\lambda)=x+y(\lambda),\ \lambda\in U(\lambda_0),$$

其中$y(\lambda)\in Y\subseteq D(T)$是$U(\lambda_0)$上的解析函数。令

$$z(\lambda)=R(\lambda,T_Y)y(\lambda),\quad \lambda\in U(\lambda_0),$$

则$z(\lambda)$：$U(\lambda_0)\to Y\subseteq D(T)$是解析函数，且

$$(\lambda I-T)(x(\lambda)-z(\lambda))=x,\ \lambda\in U(\lambda_0).$$

于是

$$\lambda_0\in\rho_T(x),\ x\in\hat{x}.$$

再由λ_0的任意性，

$$\rho_{T^Y}(\hat{x})\cap\rho(T_Y)\subseteq\rho_T(x),\quad x\in\hat{x},$$

或者

$$\sigma_T(x)\subseteq\sigma(T_Y)\cup\sigma_{T^Y}(\hat{x}).$$

又$\sigma_{T^Y}(\hat{x})\subseteq\sigma_T(x)$，可见

$$\sigma_T(x)\subseteq[\sigma_T(x)\cap\sigma(T_Y)]\cup\sigma_{T^Y}(\hat{x}),\quad x\in\hat{x}.$$

定理 8.3 设$T\in C(X)$是可分解算子，$Y\subseteq D(T)$是T的谱极大空间，则

$$\sigma(T^Y)=\overline{\sigma(T)\setminus\sigma(T_Y)}.$$

证明 由T具有性质(A)，故Y是T的解析不变子空间，由命题 8.2 及命题8.3，

$$\sigma(T)=\sigma(T_Y)\cup\sigma(T^Y).$$

于是

$$\overline{\sigma(T)\setminus\sigma(T_Y)}\subseteq\sigma(T^Y).$$

另一方面，若存在$\lambda\in\sigma(T^Y)\setminus[\overline{\sigma(T)\setminus\sigma(T_Y)}]$，可做$\sigma(T)$的开复盖$\{G_1,G_2\}$，使得$\overline{\sigma(T)\setminus\sigma(T_Y)}\subseteq G_1,\lambda\notin G_1$，且$\bar{G}_2\cap\overline{\sigma(T)\setminus\sigma(T_Y)}=\phi$。$T$是可分解算子，存在$T$的谱极大空间$\{Y_1,Y_2\}$，使得

$$X=Y_1+Y_2,\ \sigma(T|Y_i)\subseteq G_i\quad(i=1,2).$$

从G_1与G_2的选取，

$$\sigma(T|Y_2)\subseteq G_2\cap\sigma(T)\subseteq\sigma(T_Y).$$

而Y是T的谱极大空间，故$Y_2\subseteq Y\subseteq D(T)$。对任何$\hat{y}\in X/Y$，

取$y\in\hat{y}$，$y=y_1+y_2$，$y_i\in Y_i$ $(i=1,2)$．又$y_2\in Y_2\subseteq Y$，故$\hat{y}=\hat{y}_1$．由于$\lambda\in\rho(T|Y_1)$，因此存在$x\in Y_1\cap D(T)$，使得

$$(\lambda I-T)x=y_1.$$

于是

$$(\lambda I-T^Y)\hat{x}=\hat{y}_1=\hat{y},$$

即$(\lambda I-T^Y)$是满射．据定理 8.1，T^Y是(A)算子，由本章定义 2.1 后面的注记(iv)，T^Y是单射的，故$\lambda\in\rho(T^Y)$，矛盾．因此$\sigma(T^Y)\subseteq\overline{\sigma(T)\setminus\sigma(T_Y)}$．证毕．

命题 8.5　设$T\in C(X)$是强可分解算子，$Y\subseteq D(T)$是T的谱极大空间，又设$\hat{Z}$是T^Y的谱极大空间，则

$$Z=\{z|z\in X,\ \hat{z}\in\hat{Z}\}$$

是T的谱极大空间．

证明　显然$Z\in\mathrm{Lat}T$．令$z\in D(T)\cap Z$，于是，$\hat{z}\cap D(T)\neq\phi$，$\hat{z}\in D(T^Y)$，又$\hat{z}\in\hat{Z}$，故

$$T^Y\hat{z}\in\hat{Z}.$$

因此$\widehat{Tz}\in\hat{Z}$，显然$Tz\in Z$．

由于T是(AC)算子，故$X_T(\sigma(T|Z))$是T的谱极大空间，且

$$Y\subseteq Z\subseteq X_T(\sigma(T|Z)).$$

又T是强可分解算子，因此$T|X_T(\sigma(T|Z))$是可分解算子．由定理 8.3，

$$\begin{aligned}&\sigma([T|X_T(\sigma(T|Z))]^Y)\\&=\sigma\overline{(T|X_T(\sigma(T|Z)))\setminus\sigma(T_T)}\\&\subseteq\sigma\overline{(T|Z)\setminus\sigma(T|Y)},\end{aligned}$$

又$\sigma(T|Z)=\sigma(T|Y)\cup\sigma((T|Z)^Y)$，因此

$$\sigma([T|X_T(\sigma(T|Z))]^Y)\subseteq\sigma((T|Z)^Y).$$

因为$[T|X_T(\sigma(T|Z))]^Y$可等同于$T^Y|X_T(\sigma(T|Z))/Y$，故有

$$\sigma(T^Y|X_T(\sigma(T|Z))/Y)\subseteq\sigma(T^Y|Z/Y)=\sigma(T^Y|\hat{Z}),$$

$\hat{Z}$是T^Y的谱极大空间，故

$$X_T(\sigma(T|Z))/Y \subseteq Z.$$

由Z的定义，

$$X_T(\sigma(T|Z)) \subseteq Z.$$

总之，$Z = X_T(\sigma(T|Z))$是T的谱极大空间.

由上述这些结果，仿照第三章定理 4.3 方法可以证明：

定理 8.4 $T\in C(X)$是强可分解算子当且仅当对T的任意谱极大空间$Y\subseteq D(T)$，$T^Y\in C(X/Y)$是强可分解算子.

由于Y是T的谱极大空间，且$Y\subseteq D(T)$，故$\sigma(T)=\sigma(T_Y)\cup\sigma(T^Y)$，因此$\rho(T)=\rho(T_Y)\cap\rho(T^Y)$. 又$\rho(T)$非空，故$\lambda\in\rho(T)$时，$\lambda\in\rho(T^Y)$，且$Y$是$R(\lambda,T)$的不变子空间，因此$R(\lambda,T^Y)$与$R(\lambda,T)^Y$都有意义. 我们还可证明：

命题 8.6 设$T\in C(X)$是(A)算子，$Y\subseteq D(T)$是T的谱极大空间，则$R(\lambda,T)^Y=R(\lambda,T^Y)$，$\lambda\in\rho(T)$.

证明 对$\hat{x}\in D(T^Y)$，$\lambda\in\rho(T)$，

$$\begin{aligned} R(\lambda,T)^Y(\lambda I-T^Y)\hat{x} &= R(\lambda,T)^Y\widehat{(\lambda I-T)x} \\ &= \widehat{R(\lambda,T)(\lambda I-T)x} \\ &= \hat{x}. \end{aligned}$$

另一方面，对于$\hat{x}\in X/Y$，$R(\lambda,T)^Y\hat{x}=\widehat{R(,\lambda T)x}$，注意 $T)$，因此，$\widehat{R(\lambda,T)x}\in D(T^Y)$. 这样

$$\begin{aligned} &(\lambda I-T^Y)R(\lambda,T)^Y\hat{x} \\ =&(\lambda I-T^Y)\widehat{R(\lambda,T)x} \\ =&\widehat{(\lambda I-T)R(\lambda,T)x} \\ =&\hat{x}. \end{aligned}$$

证毕.

命题 8.7 设$T\in C(X)$是可分解算子，$Y\subseteq D(T)$是T的谱极大空间，则Y是$R(\lambda_0,T)$，$\lambda_0\in\rho(T)$的谱极大空间，而且

$$, \ _{Y;}*(\{0\})=\{0^*\},\ \lambda_0\in\rho(T).$$

证明 由定理 4.3. 对$\lambda\in\rho(T)$，$R(\lambda,T)$是有界可分解算子，注意按照$\rho(T)$非空的假定，存在$\lambda_0\neq\infty$，$\lambda_0\in\rho(T)=$

$\rho(T_Y)\cap\rho(T^Y)$。由T是可分解算子，故$Y=X_T(F_0)$，$F_0=\sigma(T|Y)\in\mathscr{F}$，令$F=\lambda_0-F_0$，则$F\in\mathscr{F}$，且对$\varphi(\lambda)=(\lambda-\lambda_0)^{-1}$，$\lambda\neq\lambda_0$，

$$Y=X_T(F_0)=X_T(\lambda_0-F)=X_{R(\lambda_0,T)}(\varphi(F)).$$

于是Y是$R(\lambda_0,T)$的谱极大空间。由此知$R(\lambda_0,T)^Y$是可分解算子，即$R(\lambda_0,T^Y)$是有界可分解算子，再由对偶理论，$R(\lambda_0,T^Y)^*$是可分解算子，且

$$\begin{aligned}X_{R(\lambda_0,T^Y)^*}(\{0\})&=X_{R(\lambda_0,(T^Y)^*)}(\{0\})\\&=X^*_{(T^Y)^*}(\{\lambda_0-t\}^{-1}_{t=0})\\&=X^*_{(T^Y)^*}(\{\lambda_0\}^{-1}).\end{aligned}$$

注意

$$\{\lambda_0\}\subseteq\rho(T^Y)=\rho((T^Y)^*),$$

因此

$$X^*_{R(\lambda_0,T^Y)^*}(\{0\})=\{0^*\}.$$

定理 8.5 设$T\in C(X)$是可分解算子，$Y\subseteq D(T)$是T的谱极大空间，则$T^Y\in C(X/Y)$是可分解算子。

证明 由命题 8.7 的证明过程可知，$R(\lambda_0,T^Y)$是可分解算子，且

$$X^*_{R(\lambda_0,T^Y)^*}(\{0\})=\{0^*\}.$$

据命题 5.1，$T^Y\in C(X|Y)$是可分解算子。

当然，我们还可像有界线性算子那样，讨论闭线性算子的S.Frunză猜想，在此就不一一详述了。

§9 闭可分解算子的对偶理论

定理 9.1 (i) 设$T\in C(X^*)$是可分解算子，则对任何$F\in\mathscr{F}$，$X_T(F^c)^\perp$是T^*的谱极大空间，而且

$$X_T(F^c)^\perp=X^*_{T^*}(F)$$

(ii) 设$T \in C(X)$，T^*是可分解算子，则对任何$F \in \mathscr{F}$，${}^{\perp}X^*_{T^*}(F^c)$是T的谱极大空间，而且

$$
{}^{\perp}X^*_{T^*}(F^c) = X_T(F).
$$

证 明 (i) 因T是可分解算子，由命题4.3，T是稠定义的，因此T^*是X^*上的闭线性算子，即$T^* \in C(X^*)$。令

$$
(\alpha \in \rho(T) \setminus \{\infty\},\ A = -R(\alpha, T), \Phi(\lambda) = (\lambda - \alpha)^{-1}.
$$

由定理4.3，A是有界可分解算子。再由定理2.2，

$$
X_T(F) = X_A(\Phi(F)),\ F \in \mathscr{F}
$$

注意$\Phi(F) \in \mathscr{F}$，据第三章命题5.2知

$$
X_A(\Phi(F)^c)^{\perp} = X^*_{A^*}(\Phi(F)),\ F \in \mathscr{F}.
$$

因为$A^* = [(T - \alpha I)^{-1}]^* = -R(\alpha, T^*)$，由第三章定理5.1，$A$有单值扩张性；再由命题2.3，$T^*$是$(A)$算子。于是由定理2.2，

$$
X^*_{T^*}(F) = X^*_{A^*}(\Phi(F)),\quad F \in \mathscr{F}.
$$

可见，为证明(i)中等式，只须证明，

$$
X_T(F^c) = X_A(\Phi(F^c)),\ F \in \mathscr{F}.
$$

设$x \in X_T(F^c)$，则$K_1 = \sigma_T(x) \in \mathscr{F}$，而且$K_1 \subseteq F^c$，于是

$$
x \in X_T(K_1) = X_A(\Phi(K_1)) \subseteq X_A(\Phi(F^c)).
$$

反之，若$x \in X_A(\Phi(F^c))$，则$K_2 = \sigma_A(x) \in \mathscr{F}$，且$K_2 \subseteq \Phi(F^c)$，于是$\Phi^{-1}(K_2) \subseteq F^c$，而

$$
x \in X_A(K_2) = X_T(\Phi^{-1}(K_2)) \subseteq X_T(F^c).
$$

因此

$$
\mathbf{X_T(F^c) = X_A(\Phi(F^c)),\ F \in \mathscr{F}.}
$$

所以，$X_T(F^c)^{\perp} = X^*_{T^*}(F)$，$F \in \mathscr{F}$。这说明$X^*_{T^*}(F)$是闭的，由定理3.1，$X_T(F^c)^{\perp} = X^*_{T^*}(F)$是$T^*$的谱极大空间。

利用第三章命题5.3及与(i)相类似的方法可以证明(ii)成立。

定理9.2 (i) 设$T \in C(X)$是可分解算子，且

$$
X_T(\{\infty\}) = \{0\},
$$

则$T^* \in C(X^*)$亦是可分解算子。

(ii) 设$T\in C(X^*)$，如果T^*是可分解算子，且

$$X^*_{T^*}(\{\infty\})=\{0\},$$

则T亦是可分解算子。

证明 (i)设T是可分解算子，由命题4.3，T是稠定义的，故$T^*\in C(X^*)$. 令$\alpha\in\rho(T)\setminus\{\infty\}$, $A=-R(\alpha,T)$, $\Phi(\lambda)=(\lambda-\alpha)^{-1}$，则$A^*=-R(\alpha,T^*)$。由定理4.3，$A\in\mathscr{B}(X)$是可分解算子，据第三章定理5.1知，$A^*\in\mathscr{B}(X^*)$是可分解算子。由命题5.1，为证明$T^*$是可分解算子，只须证明满足定义4.1之(i)。

设$\{K_m\}_{m=1}^{\infty}$是一串紧子集，使

$$\bigcup_{m=1}^{\infty}K_m=\mathbb{C}$$

由定理9.1，$\{X_T(K_m^c)^{\perp}\}_{m=1}^{\infty}$是$T^*$的一串谱极大空间，而且

$$\sigma(T^*|X_T(K_m^c)^{\perp})\subseteq K_m\quad(m=1,2,\cdots),$$

由于$K_m\in\mathscr{K}(m=1,2,\cdots)$，可知

$$\sigma(T^*|X_T(K_m^c)^{\perp})\in\mathscr{K}\qquad(m=1,2,\cdots).$$

因为$\bigcap_{m=1}^{\infty}K_m^c=\{\infty\}$，$X_T(\{\infty\})=\{0\}$，故

$$\bigvee_{m=1}^{\infty}\{X_T(K_m^c)^{\perp}\}=[\bigcap_{m=1}^{\infty}X_T(K_m^c)]^{\perp}$$

$$=X_T(\bigcap_{m=1}^{\infty}K_m^c)^{\perp}=X_T(\{\infty\})^{\perp}=X^*.$$

可见满足定义4.1中(i)。从而T^*是可分解算子。

我们不难证明定理9.2中条件

$$X_T(\{\infty\})=\{0\},\ X^*_{T^*}(\{\infty\})=\{0\}$$

分别是T^*与T为可分解算子的必要条件。于是得到如下定理：

定理9.3 $T\in C(X)$是可分解算子且$X_T(\{\infty\})=\{0\}$当且仅当T^*是可分解算子且$X^*_{T^*}(\{\infty\})=\{0\}$。

注　　记

本章主要内容是孙善利[1,2]的硕士研究生毕业论文中的一部分。关于闭算子的谱容度与闭强可分解算子的§6与§7取自邹承祖[5,6]之文章，其中§2之命题2.2，命题2.4及定理2.1取自侯学章[1]的硕士论文，闭可分解算子理论方向，华东师大王漱石[1]也做了相类似的研究。这方面工作，国外刚开始研究。这可见I.Erdelyi[1]之论文。他的论文才刚刚定义可分解谱算子及其具有单值扩张性。最近B.Nagy[3]做了闭S-可分解算子初步探讨。§8是取自邹承祖与程庆平文章[1]

第六章 闭谱算子

§1 闭谱算子

定义 1.1 $T\in C(X)$称为闭谱算子，如果存在Borel子集的σ-域$\mathscr{B}$上可数可加的谱测度$E(\cdot)$，使得

(i) $D(T)\supseteq E(\sigma)X$，σ是有界Borel集；

(ii) $D(T)\supseteq E(\sigma)D(T)$，$\sigma\in\mathscr{B}$，而且

$TE(\sigma)x=E(\sigma)Tx$，$x\in D(T)$，$\sigma\in\mathscr{B}$；

(iii) $\sigma(T|E(\sigma)X)\subseteq\bar{\sigma}$，$\sigma\in\mathscr{B}$.

此时称$E(\cdot)$是T的单位分解.

命题 1.1 设$T\in C(X)$是闭谱算子，$E(\cdot)$是其单位分解，则$T|E(\sigma)X$，$\sigma\in\mathscr{B}$是$E(\sigma)X$上的谱算子，$E(\tau\cap\sigma)$，$\tau\in\mathscr{B}$是其单位分解。特别，若σ有界，则$T|E(\sigma)X$是有界谱算子.

证明 令$S=T|E(\sigma)X$，易见$S\in C(E(\sigma)X)$.又令$F(\tau)=E(\tau)|E(\sigma)X$，$\tau\in\mathscr{B}$。注意$D(S)=D(T)\cap E(\sigma)X$，因此，若$\tau$是有界的，由$E(\cdot)$是Bool代数知

$$
\begin{aligned}
F(\tau)[E(\sigma)X]&=[E(\tau)|E(\sigma)X]E(\sigma)X\\
&=E(\tau\cap\sigma)|E(\sigma)X=E(\tau\cap\sigma)X\subseteq D(T)\cap E(\sigma)X\\
&=D(S).
\end{aligned}
$$

其次，对任何$\tau\in\mathscr{B}$，

$$
\begin{aligned}
F(\tau)D(S)&=[E(\tau)|E(\sigma)X]D(T)\cap E(\sigma)X\\
&=E(\tau)[D(T)\cap E(\sigma)X]\\
&\subseteq D(T)\cap E(\sigma)X
\end{aligned}
$$

$$= D(S),$$

并且，对于 $x \in D(S)$ 及 $\tau \in \mathscr{B}$，由 $D(S) \subseteq D(T)$ 及(ii)

$$\begin{aligned} SF(\tau)x &= [T|E(\sigma)X][E(\tau)|E(\sigma)X]x \\ &= TE(\tau \cap \sigma)x \\ &= E(\tau \cap \sigma)Tx \\ &= [E(\tau)|E(\sigma)X][T|E(\sigma)X]x \\ &= F(\tau)Sx. \end{aligned}$$

最后，

$$\begin{aligned} \sigma(S|F(\tau)E(\sigma)X) &= \sigma(T|E(\sigma)X|E(\sigma \cap \tau)X) \\ &= \sigma(T|E(\sigma \cap \tau)X) \\ &\subseteq \overline{\tau \cap \sigma} \subseteq \bar{\tau}, \quad \tau \in \mathscr{B}. \end{aligned}$$

由定义 1.1．$T|E(\sigma)$是闭谱算子．

命题 1.2 设 $T \in C(X)$ 是闭谱算子，$E(\cdot)$ 是其单位分解，则 T 是(A)算子．

证明 设 $E(\cdot)$是 T 的单位分解，由定义 1.1，存在$\mathscr{B}$中递升的紧致集列 $\{K_m\}_{m=1}^{\infty}$，使得

$$x = \lim_{m \to \infty} E(K_m)x, \quad x \in X.$$

令 f：$D \to D(T)$是X-值解析函数，使得

$$(\lambda I - T)f(\lambda) = 0, \quad \lambda \in D.$$

对 $m = 1, 2, \cdots$,

$$(\lambda I - T)E(K_m)f(\lambda) = E(K_m)(\lambda I - T)f(\lambda) = 0, \quad \lambda \in D.$$

$E(K_m)$是有界射影算子，从而 $E(K_m)f$：$D \to E(K_m)X$ 也是X-值解析函数．由命题 1.1，$T|E(K_m)X$ 是有界谱算子，据第四章定理 3.2 知，

$$E(K_m)f(\lambda) = 0, \quad \lambda \in D \qquad (m = 1, 2, \cdots).$$

因此

$$f(\lambda) = \lim_{m \to \infty} E(K_m)f(\lambda) = 0, \quad \lambda \in D.$$

即 T 是(A)算子．

命题 1.3 设 $T\in C(X)$ 是闭谱算子，$E(\cdot)$是它的单位分解，$\sigma\in\mathscr{K}$，则

$$E(\sigma)X=X_T(\sigma).$$

证明 设 $x\in X_T(\sigma)$，于是由命题1.2，

$$\sigma_T(x)\subseteq\sigma,\quad \sigma^c\subseteq\rho_T(x).$$

因此对$\lambda\in\sigma^c$，及任何有界 Borel 集 τ，

$$(\lambda I-T)\tilde{x}(\lambda)=x,\quad \lambda\in\sigma^c.$$

$$(\lambda I-T)E(\tau)\tilde{x}(\lambda)=E(\tau)x,\quad \lambda\in\sigma^c.$$

当然，$E(\tau)\tilde{x}(\lambda)$：$\sigma^c\to E(\tau)X\subseteq D(T)$是解析函数，这样，

$$\sigma_{T|E(\tau)X}(E(\tau)x)\subseteq\sigma.$$

据命题1.1，$T|E(\tau)X$ 是有界谱算子，由第四章定理3.5知，对任何有界的 $\tau\in\mathscr{B}$，皆有

$$E(\sigma)E(\tau)x=E(\tau)x.$$

取紧集 $K_m\in\mathscr{K}(m=1,2,\cdots)$，且使

$$x=\lim_{m\to\infty}E(K_m)x.$$

于是

$$E(\sigma)E(K_m)x=E(K_m)x.$$

这样，

$$E(\sigma)x=\lim_{m\to\infty}E(\sigma)E(K_m)x=\lim_{m\to\infty}E(K_m)x=x.$$

从而，$x\in E(\sigma)X$.

反之，令$x\in E(\sigma)X$. 对$\lambda\notin\sigma$，由定义1.1之(iii)，$R(\lambda,T|E(\sigma)X)$是σ^c上的解析函数，令$\tilde{x}(\lambda)=R(\lambda,T|E(\sigma)X)x$，则

$$(\lambda I-T)\tilde{x}(\lambda)=x,\quad \lambda\in\sigma^c.$$

故 $\sigma^c\subseteq\rho_T(x)$，即 $\sigma_T(x)\subseteq\sigma$，因此 $x\in X_T(\sigma)$.

定理 1.1 设 $T\in C(X)$ 是闭谱算子，则 T 是闭可分解算子.

证明 由命题1.3，对$K\in\mathscr{K}$，$E(K)X$ 是 T 的谱极大空间，由 $E(\cdot)$的可数可加性，

$$X=\bigvee_{m=1}^{\infty}E(K_m)X,\ \sigma(T|E(K_m)X)\subseteq K_m\quad(m=1,2,\cdots).$$

注意 $K_m\uparrow\mathbb{C}$，以及 $K_m\in\mathscr{K}$，可知满足第五章定义4.1之(i).

其次，对 $\mathbb{C}_\infty$ 之任意开复盖 $\{G_k\}_{k=1}^n$，可取 $\mathbb{C}_\infty$ 的另一个开复盖 $\{D_k\}_{k=1}^n$，使得 $\bar{D}_k\subseteq G_k\ (k=1,2,\cdots,n)$. 从 $E(\cdot)$ 之可数可加性，

$$X=E(\mathbb{C})X=\sum_{k=1}^{n}E(\bar{D}_k)X.$$

而且

$$\sigma(T|E(\bar{D}_k)X)\subseteq\bar{D}_k\subseteq G_k\qquad(k=1,2,\cdots,n).$$

下面只须证明，$E(\bar{D}_k)X$ 是 T 的谱极大空间. 设 $Y\in\mathrm{Lat}\,T$，且 $\sigma(T|Y)\subseteq\sigma(T|E(\bar{D}_k)X)$，令

$$x=\lim_{m\to\infty}E(K_m)x,\ x\in Y.$$

$E(K_m)$ 是与 T 可交换的有界射影算子. 由第五章命题2.1，

$$\begin{aligned}\sigma_T(E(K_m)x)&\subseteq\sigma_T(x)\subseteq\sigma_{T|Y}(x)\subseteq\sigma(T|Y)\\&\subseteq\sigma(T|E(\bar{D}_k)X)\subseteq\bar{D}_k\quad(k=1,2,\cdots,n).\end{aligned}$$

$E(K_m)x\in E(K_m)X$，所以

$$\begin{aligned}\sigma_T(E(K_m)x)&\subseteq\sigma_{T|E(K_m)X}(E(K_m)x)\\&\subseteq\sigma(T|E(K_m)X)\subseteq K_m.\end{aligned}$$

从而

$$\sigma_T(E(K_m)x)\subseteq\bar{D}_k\cap K_m\qquad(m=1,2,\cdots).$$

注意 $\bar{D}_k\cap K_m\in\mathscr{K}$，故

$$E(K_m)x\in X_T(\bar{D}_k\cap K_m)=E(\bar{D}_k\cap K_m)X\subseteq E(\bar{D}_k)X\qquad(m=1,2,\cdots).$$

因此

$$x=\lim_{m\to\infty}E(K_m)x\in E(\bar{D}_k)X\quad(k=1,2,\cdots,n).$$

可见 $Y\subseteq E(\bar{D}_k)X\qquad(k=1,2,\cdots,n)$.

推论 1 设 $T\in C(X)$ 是闭谱算子，则 T 是 (AC) 算子.

推论 2 设 $T\in C(X)$ 是闭谱算子，$E(\cdot)$ 是其单位分解，

又 A 是与 T 可交换的有界算子，则有

$$AE(\sigma)=E(\sigma)A,\quad \sigma\in\mathscr{B}.$$

证明 令 $\sigma\in\mathscr{K}$，$x\in E(\sigma)X$，由第五章命题2.1，$\sigma_T(Ax)\subseteq\sigma_T(x)$，由命题1.3，$\sigma_T(x)\subseteq\sigma$，故

$$\sigma_T(Ax)\subseteq\sigma,$$

因此，$Ax\in X_T(\sigma)=E(\sigma)X$。所以

$$E(\sigma)AE(\sigma)=AE(\sigma),\quad \sigma\in\mathscr{K},$$

或者

$$(I-E(\sigma))AE(\sigma)=0,\quad \sigma\in\mathscr{K}.$$

对任意开集 σ，可选取 $K_m\in\mathscr{K}$ 且 $\bigcup\limits_{m=1}^{\infty}K_m=\sigma$，$K_m$ 是上升的 $(m=1,2,\cdots)$，由 $E(\cdot)$ 的可数可加性，对开集 σ，

$$E(\sigma)AE(\sigma)=AE(\sigma).$$

这样，对 $\sigma\in\mathscr{K}$，有

$$\begin{aligned}AE(\sigma)&=E(\sigma)AE(\sigma)\\&=E(\sigma)AE(\sigma)+(I-E(\sigma^c))AE(\sigma^c)\\&=E(\sigma)AE(\sigma)+E(\sigma)AE(\sigma^c)\\&=E(\sigma)A[E(\sigma)+E(\sigma^c)]\\&=E(\sigma)A.\end{aligned}$$

$\mathscr{B}$ 是 σ- 域且 $E(\cdot)$ 可数可加，因此可证明

$$AE(\sigma)=E(\sigma)A,\quad \sigma\in\mathscr{B}.$$

定理 1.2 设 $T\in C(X)$ 是闭谱算子，则 T 的单位分解是唯一的。

证明 令 $E(\cdot)$，$E_1(\cdot)$ 是 T 的两个单位分解，由推论2，对任何 $\sigma,\tau\in\mathscr{B}$，$E_1(\sigma)E(\tau)=E(\tau)E_1(\sigma)$。令 $\sigma\in\mathscr{K}$，于是 $E_1(\sigma)X\in\operatorname{Lat}E(\tau)$。据命题1.1，$S=T|E_1(\sigma)X$ 是有界谱算子，其单位分解是

$$F_1(\tau)=E_1(\tau)|E_1(\sigma)X,\quad \tau\in\mathscr{B}.$$

我们现在证明

$$F(\tau)=E(\tau)|E_1(\sigma)X,\ \tau\in\mathscr{B}.$$

也是 S 的单位分解。这与第四章命题 3.3 相矛盾。从而可证明 $F_1=F$，即

$$E_1(\tau)E_1(\sigma)=E(\tau)E_1(\sigma),\ \tau\in\mathscr{B},\ \sigma\in\mathscr{K}.$$

由 $E_1(\cdot)$ 之可数可加性，可知 $E_1(\tau)=E(\tau)$，$\tau\in\mathscr{B}$。

因此只须证明 $F(\cdot)$ 是 S 的单位分解。类似于命题 1.1 的证明，(i) 与 (ii) 是明显的，只须证明 (iii)，即对任何 $\tau\in\mathscr{B}$。

$$\sigma(S|E(\tau)E_1(\sigma)X)\subseteq\bar{\tau}.$$

这又只须证明对 $\lambda\notin\bar{\tau}$，$(\lambda I-T)|E(\tau)$ 是映 $E_1(\sigma)X$ 到自身上的满射，或者 $(\lambda I-T)$ 是映 $E(\tau)E_1(\sigma)X=E_1(\sigma)E(\tau)X$ 到自身上的满射。

由定义 1.1，若 $\lambda\notin\bar{\tau}$，则

$$(\lambda I-T)(D(T)\cap E(\tau)X)=E(\tau)X,\ \tau\in\mathscr{B}.$$

但是

$$\begin{aligned}E_1(\sigma)E(\tau)X&=E_1(\sigma)(\lambda I-T)(D(T)\cap E(\tau)X)\\&=(\lambda I-T)E_1(\sigma)(D(T)\cap E(\tau)X)\\&\subseteq(\lambda I-T)E_1(\sigma)E(\tau)X.\end{aligned}$$

由定义 1.1 之 (ii)，相反包含关系亦成立。

命题 1.4 设 $T\in C(X)$ 是闭谱算子，$E(\cdot)$ 是其单位分解，τ 是开集，则

$$\sigma(T)\cap\tau\subseteq\sigma(T|E(\tau)X)\subseteq\sigma(T)\cap\bar{\tau}.$$

证明 由定义 1.1，$\sigma(T|E(\tau)X)\subseteq\bar{\tau}$。若 $\lambda\notin\sigma(T)$，令 $R_0=E(\tau)R(\lambda,T)|E(\tau)X$，注意

$$R_0(\lambda I-T)x=E(\tau)R(\lambda,T)(\lambda I-T)x=E(\tau)x=x,$$

$x\in D(T|E(\tau)X)$，并且

$$\begin{aligned}(\lambda I-T)R_0x&=E(\tau)(\lambda I-T)R(\lambda,T)x\\&=E(\tau)x=x,\ x\in E(\tau)X.\end{aligned}$$

这样，$\lambda\notin\sigma(T|E(\tau)X)$，于是

$$\sigma(T|E(\tau)X)\subseteq\sigma(T)\cap\bar{\tau}.$$

反之，若$\lambda\in\tau$，但$\lambda\notin\sigma(T|E(\tau)X)$，则

$$R_0=(\lambda I-T|E(\tau)X)^{-1}$$

是有界的。由于$\lambda\notin\tau^c$，由定义 1.1，$R_1=(\lambda I-T|E(\tau^c)X)^{-1}$是有界的。令

$$Rx=R_0E(\tau)x+R_1E(\tau^c)x,\ x\in X.$$

易知$R=R(\lambda,T)$，故$\lambda\notin\sigma(T)$。因此

$$\sigma(T)\cap\tau\subseteq\sigma(T|E(\tau)X).$$

推论 设$T\in C(X)$是闭谱算子，P是与T可交换的射影算子，且$PD(T)\subseteq D(T)$，则

$$\sigma(T|PX)\subseteq\sigma(T).$$

仿命题 1.4 第二部分的证明即可证明。

命题 1.5 设$T\in C(X)$是闭谱算子，$E(\cdot)$是其单位分解，则

$$\sigma(T)=\bigcap_{\substack{E(e)=I\\ e\in\mathscr{F}}}e.$$

证明 由定理 1.1，T是可分解算子，再据第五章定理 6.4，T有谱容度$\mathscr{E}$，由命题1.3及$E(\cdot)$的可数可加性，$E(e)X=\mathscr{E}(e)$，$e\in\mathscr{F}$。于是$E(\cdot)X=\mathscr{E}(\cdot)$是$T$的谱容度。最后，由命题6.11，$\sigma(T)=\bigcap_{\substack{E(e)=I\\ e\in\mathscr{F}}}e$成立。

§2 闭谱算子的函数演算

命题 2.1 设Σ是某一集之子集的σ-域，$E(\cdot)$是定义于Σ的可数可加谱测度，Σ_0是Σ中一个子类，它包含每个集的子集及任意有限个集之并集；设Q_0是定义于$\bigcup_{e\in\Sigma_0}E(e)X$上的线性算子，对任意$e\in\Sigma_0$，$Q_0E(e)$是有界的，并且

$$E(e)Q_0x=Q_0E(e)x,\ x\in D(Q_0).$$

对Σ_0中渐升列$\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$，$E\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}e_n\right)=I$，定义算子$Q$：

$$D(Q)=\{x \mid \lim_{n\to\infty} Q_0 E(e_n)x \text{ 存在}\},$$
$$Qx=\lim_{n\to\infty} Q_0 E(e_n)x, \quad x\in D(Q),$$

则 $Q\in C(X)$ 是稠定义的，并且它的定义不依赖于 $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ 的选取。

证明 显然 Q 是线性的。先证 $D(Q)$ 是稠密的。若 $x=E(e_n)y$，则当 $m\geqslant n$ 时，$Q_0E(e_m)x=Q_0x$。于是

$$\lim_{m\to\infty} Q_0E(e_m)x=Q_0x=Q_0E(e_n)y,$$

因此 $x\in D(Q)$。这样 $E(e_n)X\subseteq D(Q)$．又 $E(\bigcup_{n=1}^{\infty} e_n)=I$，所以 $D(Q)$ 在 X 中稠密。

现证 Q 是闭算子。令 $z\in D(Q)$，则

$$\lim_{n\to\infty} Q_0E(e_n)E(e)z=\lim_{n\to\infty} E(e)Q_0E(e_n)z$$
$$=E(e)Qz, \quad e\in\Sigma_0.$$

这说明

$$QE(e)z=E(e)Qz, \quad z\in D(Q), \quad e\in\Sigma_0.$$

显然还有

$$QE(e_n)z=Q_0E(e_n)z, \quad z\in X.$$

令

$$x_m\in D(Q), \quad \lim_{m\to\infty} x_m=x, \quad \lim_{m\to\infty} Qx_m=y,$$

则

$$y=\lim_{m\to\infty} Qx_m=\lim_{m\to\infty}\lim_{n\to\infty} Q_0E(e_n)x_m$$
$$=\lim_{m\to\infty}\lim_{n\to\infty} E(e_n)Qx_m.$$

由前段讨论，$\|E(e_n)\|$ 关于 n 一致有界。易见

$$\lim_{m\to\infty} E(e_n)Qx_m=E(e_n)y$$

关于 n 是一致的。据 Moore-Smith 收敛定理及 $Q_0E(e_n)$ 的有界性，

$$y=\lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty} E(e_n)Qx_m$$
$$=\lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty} Q_0E(e_n)x_m$$
$$=\lim_{n\to\infty} Q_0E(e_n)x.$$

因此 $x\in D(Q)$，且 $y=Qx$，故 $Q\in C(X)$。

最后证明 Q 的定义不依赖于 $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ 之选取。令 $\{\tilde{e}_n\}_{n=1}^{\infty}\subseteq\Sigma_0$ 是另一渐升列且 $E(\bigcup_{n=1}^{\infty}\tilde{e}_n)=I$，$\tilde{Q}$ 定义为

$$D(\tilde{Q})=\{x\,|\lim_{n\to\infty}Q_0E(\tilde{e}_n)x\text{存在}\},$$

$$\tilde{Q}x=\lim_{n\to\infty}Q_0E(\tilde{e}_n)x,\quad x\in D(\tilde{Q}).$$

令 $x\in D(\tilde{Q})$，则 $\lim_{n\to\infty}E(\tilde{e}_n)x=x$。仿前讨论

$$\tilde{Q}x=\lim_{n\to\infty}Q_0E(\tilde{e}_n)x=\lim_{n\to\infty}QE(\tilde{e}_n)x.$$

又 Q 是闭的，故 $x\in D(Q)$ 且 $Qx=\tilde{Q}x$，因此 $\tilde{Q}\subseteq Q$。类似可证 $Q\subseteq\tilde{Q}$。所以 $Q=\tilde{Q}$。证毕。

命题 2.2 在前题假设下，$E(e)D(Q)\subseteq D(Q)$，$E(e)Qx=QE(e)x$，$x\in D(Q)$，$e\in\Sigma$。

证明 令 $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}\subseteq\Sigma_0$，$x\in D(Q)$，则 $\lim_{n\to\infty}E(e)E(e_n)x=E(e)x$，并且

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}QE(e_n)E(e)x&=\lim_{n\to\infty}QE(e_n\cap e)x\\&=\lim_{n\to\infty}E(e_n\cap e)Qx\\&=E(e)Qx.\end{aligned}$$

由 Q 的闭性，$E(e)x\in D(Q)$ 且 $E(e)Qx=QE(e)x$。

现在考虑闭谱算子 T 的函数演算。令 $E(\cdot)$ 是 T 的单位分解，$f\in\mathscr{F}(U)$，且 $E(\sigma(T)\setminus U)=\phi$。$e$ 是有界 Borel 集，且 $\bar{e}\subseteq U$，由命题 1.1，$T|E(e)X$ 是有界算子，而且

$$\sigma(T|E(e)X)\subseteq\bar{e}\subseteq U.$$

据 Riesz-Dunford 函数演算，可定义 $f(T|E(e)X)$。令

$$x\in E(e)X\cap E(\tilde{e})X.$$

那么有

$$f(T|E(e)X)x=f(T|E(\tilde{e})X)x.$$

注意

$$\tilde{e}\cap e\subseteq e,\quad \tilde{e}\cap e\subseteq\tilde{e}.$$

不妨设 $\tilde{e}\subseteq e$。因此

$$R(\lambda, T|E(\bar{e})X)x = R(\lambda, T|E(e)X)x,\ \lambda \notin e, x \in E(\bar{e})X.$$

故

$$f(T|E(\bar{e})X)x = f(T|E(e)X)x,\quad x \in E(e)X \cap E(\bar{e})X.$$

这样我们可在 $\bigcup_e E(e)X$（其中 $\bar{e} \subseteq U$，且 e 是有界 Borel 集）上定义单值的线性算子 Q_0：

$$Q_0 x = f(T|E(e)X)x,\ x \in E(e)X.$$

现在可定义算子函数 $f(T)$。

定义 2.1 设 $T \in C(X)$ 是闭谱算子，$E(\cdot)$ 是其单位分解，U 是开集，$E(U) = I$，$f \in \mathscr{F}(U)$；又 $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是有界 Borel 集族，$\bar{e}_n \subseteq U$ 且 $E(\bigcup_{n=1}^{\infty} e_n) = I$。定义 $f(T)$ 如下：

$$D(f(T)) = \{x|\ \lim_{n\to\infty} f(T|E(e_n)X)E(e_n)x \text{ 存在}\},$$

$$f(T)x = \lim_{n\to\infty} f(T|E(e_n)X)E(e_n)x,\ x \in D(f(T)).$$

定理 2.1 $f(T) \in C(X)$ 不依赖于 Borel 集列的选取；而且

(i) 对任意 $e \in \mathscr{B}$，$x \in D(f(T))$，

$$E(e)D(f(T)) \subseteq D(f(T))$$

且

$$E(e)f(T)x = f(T)E(e)x;$$

(ii) 对任意 $e \in \mathscr{B}$，

$$f(T|E(e)X) = f(T)|E(e)X,$$

特别若 $e \in \mathscr{B}$ 有界且 $\bar{e} \subseteq U$，则 $f(T)|E(e)X$ 有界；

(iii) 令 $Z = \{\lambda|\lambda \in \mathbb{C},\ f(\lambda) = 0\}$ 且 $E(Z) = 0$，则 $f(T)$ 有逆，且

$$[f(T)]^{-1} = (1/f)(T);$$

(iv) 令 $T \in \mathscr{B}(X)$，$f \in \mathscr{F}(\sigma(T))$，则 $f(T)$ 有界且与 Riesz-Dunford 定义一致，又若 f 在 $\sigma(T)$ 上及无穷远处解析，则 $f(T)$ 有界；

(v) 令$g\in\mathscr{F}(V)$，$E(V)=I$，则

$$D(g(T)+f(T))=D((g+f)(T))\cap D(g(T)),$$

$$g(T)x+f(T)x=(g+f)(T)(x);\ x\in D(g(T)+f(T));$$

(vi) $D(g(T)f(T))=D((gf)(T))\cap D(f(T))$,

$$g(T)f(T)x=(gf)(T)x,\ x\in D(g(T)f(T));$$

(vii) 若$\alpha\neq 0$，则

$$D((\alpha f)(T))=D(f(T)),$$

$$(\alpha f)(T)x=\alpha f(T)x,\ x\in D(f(T)).$$

证明 $f(T)\in C(X)$不依赖于Borel集列的选取可由定义2.1及命题2.1得到。(i)可由命题2.2得到。(ii)令$e\in\mathscr{B}$有界且$\bar{e}\subseteq U$，特别取$e_n=e$，$x\in E(e)X$，由定义2.1，

$$f(T|E(e_n)X)x=f(T|E(e)X)x\quad(n\geqslant 1).$$

因此

$$\lim_{n\to\infty}f(T|E(e_n)X)x=f(T|E(e)X)x.$$

故

$$f(T)x=f(T|E(e)X)x,\ x\in E(e)X.$$

或者

$$f(T)|E(e)X=f(T|E(e)X).$$

一般令$e\in\mathscr{B}$。由命题1.1，$T|E(e)X$是闭谱算子，而且$T|X(e)X$的单位分解$F(\cdot)=E(\cdot)|E(e)X$。显然$F(U)=I|E(e)E$，从而$f(T|E(e)X)$是确定的。令$\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$是有界Borel集列，$\bar{e}_n\subseteq U$，且$E\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}e_n\right)=I$，因此亦有$F\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}e_n\right)=I|E(e)X$。令$x\in E(e)X\cap D(f(T|E(e)X))$，由定义2.1.

$$\begin{aligned}f(T|E(e)X)x&=\lim_{n\to\infty}f(T|F(e_n)E(e)X)F(e_n)x\\&=\lim_{n\to\infty}f(T|E(e\cap e_n)X)E(e_n)x\\&=\lim_{n\to\infty}f(T)E(e_n)x.\end{aligned}$$

又$E(e_n)x\to x$，由于$f(T)$是闭的，故$x\in D(f(T))$，而且

$$f(T)x=f(T|E(e)X)x.$$

反之，令 $x\in E(e)X\cap D(f(T))$，由于 $E(e)f(T)x=f(T)E(e)x=f(T)x$，可见 $f(T)x\in E(e)X$。因此由 (i)及(ii)中对有界 Borel 集的结果，可见

$$\begin{aligned}f(T)x&=\lim_{n\to\infty}f(T)E(e\cap e_n)x\\&=\lim_{n\to\infty}f(T|E(e\cap e_n)X)E(e_n)x\\&=\lim_{n\to\infty}f(T|F(e_n)E(e)X)F(e_n)x.\end{aligned}$$

由定义 2.1，$x\in D(f(T|E(e)X))$，且

$$f(T|E(e)X)x=f(T)x.$$

下面先证(vi)。令$x\in D(g(T)f(T))$. 由于$E(\sigma(T)\setminus U\cap V)=0$，不失一般性可设$U=V$，令 $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是有界 Borel集，且 $\bar{e}_n\subseteq U(n\geqslant 1)$，$E\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}e_n\right)=I$。注意 $T|E(e_n)X$ 是有界的，由 Riesz-Dunford 函数演算及(i)，(ii)，有

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}(gf)(T|E(e_n)X)E(e_n)x\\&=\lim_{n\to\infty}g(T|E(e_n)X)f(T|E(e_n)X)E(e_n)x\\&=\lim_{n\to\infty}g(T|E(e_n)X)E(e_n)f(T)x\\&=\lim_{n\to\infty}E(e_n)g(T)f(T)x\\&=g(T)f(T)x.\end{aligned}$$

由定义 2.1，$x\in D((gf)(T))$，且

$$(gf)(T)x=g(T)f(T)x.$$

令 $x\in D(f(T))\cap D((gf)(T))$。由(i)与(ii)，

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}g(T|E(e_n)X)E(e_n)f(T)x\\&=\lim_{n\to\infty}g(T)E(e_n)f(T)x\\&=\lim_{n\to\infty}g(T)f(T)E(e_n)x\\&=\lim_{n\to\infty}(gf)(T)E(e_n)x\\&=\lim_{n\to\infty}E(e_n)(gf)(T)x\end{aligned}$$

$= (gf)(T)x.$

可见 $x \in D(g(T)f(T))$ 且 $g(T)f(T)x = (gf)(T)x$. 这就证明了(vi).

为证明(iii)，取(vi)中 $g = 1/f$，由(vi)有，

$D(f(T)g(T)) = D(g(T))$，$D(g(T)f(T)) = D(f(T))$，

而且

$$f(T)g(T)x = x, \quad 当\ x \in D(g(T)),$$
$$g(T)f(T)x = x, \quad 当\ x \in D(f(T)).$$

这说明 $f(T)$ 与 $g(T)$ 是单射算子，并且 $g(T)$ 的值域是 $f(T)$ 的定义域的子集. 反之亦然. 若 $x \in D(f(T))$，则 $x = g(T)f(T)x$，从而就有 $x \in R(g(T))$. 这样 $R(g(T)) = D(f(T))$；类似 $R(f(T)) = D(g(T))$，这就证明了(iii). 至于(vii)的证明那是明显的.

现在证明(v). 令 $x \in D(f(T) + g(T))$. $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ 如前，注意 $T|E(e_n)X$ 是有界的，由(i)及(ii)，应用函数演算，

$$\lim_{n\to\infty} (f+g)(T|E(e_n)X)E(e_n)x$$
$$= \lim_{n\to\infty} \{f(T|E(e_n)X)E(e_n)x + g(T|E(e_n)X)E(e_n)x\}$$
$$= \lim_{n\to\infty} E(e_n)\{f(T)x + g(T)x\}$$
$$= f(T)x + g(T)x.$$

由定义 2.1，$x \in D((f+g)(T))$ 且

$$(f+g)(T)x = f(T)x + g(T)x.$$

这证明了.

$$D((f+g)(T)) \supseteq D(f(T) + g(T)).$$

又 $D(f(T)) \supseteq D(f(T) + g(T))$，易见.

$$D(f(T) + g(T)) \subseteq D((f+g)(T)) \cap D(f(T)).$$

由(vii)及同样讨论可证明

$$D(g(T)) \supseteq D((f+g)(T) - f(T))$$
$$= D((f+g)(T)) \cap D(f(T)).$$

又因为

$$D(f(T)+g(T))=D(f(T))\cap D(g(T)).$$

这就证明了

$$D(f(T)+g(T))\supseteq D((f+g)(T))\cap D(f(T)).$$

于是(v)证明完毕，最后证明(iv)。先考虑(iv)之第一部分。此时 $\sigma(T)$是U的紧子集，由第四章命题 3.2，$E(\sigma(T))=I$。不失一般性，可取 $e_n=\sigma(T)(n\geqslant 4)$，由定义 2.1，

$$f(T)=f(T|E(\sigma(T))X)E(\sigma(T)).$$

由于 $E(\sigma(T))=I$，这与 Riesz-Dunford 定义的算子函数 $f(T)$一致。

再证(iv)的第二结论。由于$f(T)$是闭的。这只需证明$f(T)$是处处定义的. 由(ii)，$D(f(T))\supseteq E(e)X, e\in\mathscr{B}$是有界的. 从而又只须证明 $D(f(T))\supseteq E(K_r)X$，此处$K_r=\{\lambda||\lambda|\geqslant r\}$，$r>0$。取 r 充分大，可使 K_{r-2} 包含在 f 的解析区域内，从(ii)只须证明

$$D(f(T|E(K_r)X))\supseteq E(K_r)X.$$

由命题 1.1，$T|E(K_r)K$ 是闭谱算子，其单位分解 $F(\cdot)$满足 $F(K_r)=I$。为方便我们不妨设 $T=T|E(K_r)X$，$E(K_r)=I$。

令 $C=\{\lambda||\lambda|=r-1\}$，$r>1$，$R>r$，$C_R=\{\lambda||\lambda|=R\}$，对 S，设 $\sigma(S)$位于C与C_R之间，则

$$f(S)=\frac{1}{2\pi i}\left\{\int_{C^{-1}}-\int_{C_R}\right\}f(\lambda)(\lambda I-S)^{-1}d\lambda.$$

对充分大λ，

$$(\lambda I-S)^{-1}=\sum_{n=0}^{\infty}\lambda^{-n-1}S^n.$$

对 $R\to\infty$，有

$$f(S)=-f(\infty)I+\frac{1}{2\pi i}\int_C f(\lambda)(\lambda I-S)^{-1}d\lambda.$$

令 $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$是 K_r 的紧子集的渐升列，且 $\bigcup_{n=1}^{\infty}e_n=K_r$。由上述公式及(ii)，

$$f(T|E(e_n)X)$$

$$= -f(\infty)I|E(e_n)X + \frac{1}{2\pi i}\int_C f(\lambda)[(\lambda I-T)^{-1}|E(e_n)X]d\lambda$$

$$= \{-f(\infty)I + \frac{1}{2\pi i}\int_C f(\lambda)(\lambda I-T)^{-1}d\lambda\}|E(e_n)X.$$

因为

$$-f(\infty)I + \frac{1}{2\pi i}\int_C f(\lambda)(\lambda I-T)^{-1}d\lambda$$

是有界的，因此极限 $\lim_{n\to\infty} f(T|E(e_n)X)E(e_n)x$，$x\in X$ 存在。这样(iv)证毕。

现在把闭谱算子的函数演算推广到更一般情况。

定义 2.2 Σ是集合 S 的子集的 σ-域，$E(\cdot)$是定义于Σ上可数可加谱测度，f 是在 S 上 E-几乎处处定义的 Σ-可测函数。定义算子 $T(f)$如下：

$$D(T(f)) = \{x|\lim_{n\to\infty} T(f_n)x\text{存在}\},$$

$$T(f_n) = \int_S f_n(s)E(ds),$$

其中

$$f_n(s) = \begin{cases} f(s), & |f(s)|\leqslant n, \\ 0, & |f(s)|>n, \end{cases}$$

$$T(f)x = \lim_{n\to\infty} T(f_n)x,\quad x\in D(T(f)).$$

定理 2.2 设 $(S,\Sigma,E(\cdot))$，f 及 $T(f)$ 如定义 2.2，则 $T(f)\in C(X)$是稠定义的。此外，

(i) $D(T(f)) = D(T(|f|))$；

(ii) $D(T(f))\subseteq D(T(g))$，如果$|f(s)|\geqslant|g(s)|$ E-几乎处处；

(iii) $T(f)$有界当且仅当f是E-几乎处处有界，且

$$E-\operatorname*{ess\,sup}_{s\in S}|f(s)|\leqslant\|T(f)\|\leqslant 4M\, E\text{-}\operatorname*{ess\,sup}_{s\in S}|f(s)|;$$

(iv) $T(\alpha f)=\alpha T(f)$;

(v) $T(f+g)\supseteq T(f)+T(g)$，且，

$$D(T(f)+T(g))=D(T(f+g))\cap D(T(f));$$

(vi) $T(fg)\supseteq T(f)T(g)$,

$$D(T(f)T(g))=D(T(fg))\cap D(T(g));$$

(vii) $T(f)E(e)\supseteq E(e)T(f)$，$e\in\Sigma$；

(viii) $T(f)$有逆当且仅当$E(f^{-1}(0))=0$，且此时

$$T(f)^{-1}=T(1/f);$$

(ix) $x^*T(f)x=\int_S f(s)x^*E(ds)x$,

$$x\in D(T(f)),\ x^*\in X^*.$$

证明 对$e\in\Sigma_0$，示性函数为χ_e，于是$f\chi_e$是有界的，如定义2.2的算子$T(f\chi_e)$是有界算子，定义

$$Q_0x=T(f\chi_e)x,\ x\in E(e)X,\ e\in\Sigma_0.$$

若$x\in E(\tilde{e})X\cap E(e)X$，从有界函数的算子演算，

$$\begin{aligned}T(f\chi_e)x&=T(f\chi_e)E(\tilde{e})x\\&=T(f\chi_{e\cap\tilde{e}})x\\&=T(f\chi_{\tilde{e}})E(e)x\\&=T(f\chi_{\tilde{e}})x.\end{aligned}$$

这样Q_0在$\bigcup_{e\in\Sigma_0}E(e)X$上有定义，从命题2,1,$T(f)$是闭的稠定义的线性算子。

(vii)的证明可由命题2.2得到，(iv)是显然的。我们证明(iii)。令$e\in\Sigma_0$，$x\in E(e)X$，于是

$$\begin{aligned}T(f\chi_e)x&=\lim_{n\to\infty}T(f\chi_e)E(e_n)x\\&=\lim_{n\to\infty}T(f\chi_e\chi_{e_n})x\\&=\lim_{n\to\infty}T(f\chi_{e_n})x\\&=T(f)x.\end{aligned}$$

因此对$x\in E(e)X$，$T(f\chi_e)x=T(f)E(e)x$。

另一方面，若$x\in E(S\setminus e)X$，$T(f)E(e)x=0$，则

$$T(f\chi_e)x = T(f\chi_e^2)x = T(f\chi_e)E(e)x = 0.$$

这样，对 $x \in E(S \setminus e)X$，也有 $T(f\chi_e)x = T(f)E(e)x$。故 $T(f\chi_e) = T(f)E(e)$。

设 $T(f)$ 是有界的，于是算子族 $T(f\chi_e)$，$e \in \Sigma_0$ 是一致有界的。由此 $f\chi_e, e \in \Sigma$ 是一致 E- 几乎本性有界的。(iii) 的充分性可类似于第四章命题 1.2 的证明。

情况(i)可由情况(ii)得到，而(ii)可由情况(vi)得到.事实上，令 $|f(s)| \geq |g(s)|$，$h(s) = g(s)/f(s)$，当 $f(s) \neq 0$ 时，$h(s) = 0$，当 $f(s) = 0$ 时。于是 $|h(s)| \leq 1$，由(iii)，$T(h)$ 有界，又 $g = hf$，由于 $D(T(h)) = X$，从(vi)得到

$$D(T(f)) = D(T(h)T(f)) = D(T(f)) \cap D(T(g)),$$

从而

$$D(T(f)) \subseteq D(T(g)).$$

于是(ii)成立.

为此我们来证(vi)。令 $e_n = \{s \mid |f(s)| \leq n \text{ 且 } |g(s)| \leq n\}$. 由命题 2.1 及前证，有

$$D(T(g)) = \{x \mid \lim_{n\to\infty} T(g\chi_{e_n})x \text{ 存在}\},$$

$$T(g)x = \lim_{n\to\infty} T(g\chi_{e_n})x, \quad x \in D(T(g)),$$

此处 $T(g\chi_{e_n})$ 是由第四章定理 6.1 确定的有界算子。类似地可定义 $T(gf)$ 与 $T(f)$，因而若 $x \in D(T(g)T(f))$，由第四章定理 6.1 可得

$$\lim_{n\to\infty} T(gf\chi_{e_n})x = \lim_{n\to\infty} T(g\chi_{e_n})T(f\chi_{e_n})E(e_n)x,$$

由(vii)，对 $z \in D(T(f))$，

$$T(f)E(e_n)z = \lim_{m\to\infty} T(f\chi_{e_m}\chi_{e_n})E(e_n)z$$
$$= T(f\chi_{e_n})E(e_n)z,$$

类似的，对 $z \in D(T(g))$，

$$T(g)E(e_n)z = T(g\chi_{e_n})E(e_n)z.$$

因此由(vii)，

$$\lim_{n\to\infty} T(gf\chi_{e_n})x = \lim_{n\to\infty} T(g\chi_n)T(f)E(e_n)x$$
$$= \lim_{n\to\infty} T(g)E(e_n)T(f)x$$
$$= \lim_{n\to\infty} E(e_n)T(g)T(f)x$$
$$= T(g)T(f)x.$$

可见，$x\in D(T(gf))$，且 $T(gf)x = T(g)T(f)x$，从而 $x\in D(T(gf))\cap D(T(f))$。再由(vii)，

$$\lim_{n\to\infty} T(g\chi_{e_n})T(f)x = \lim_{n\to\infty} T(g\chi_{e_n})E(e_n)T(f)x$$
$$= \lim_{n\to\infty} T(g\chi_{e_n})T(f)E(e_n)x$$
$$= \lim_{n\to\infty} T(g\chi_{e_n})T(f\chi_{e_n})x$$
$$= \lim_{n\to\infty} T(gf\chi_{e_n})x$$
$$= T(gf)x.$$

因此 $T(f)x\in D(T(g))$，且 $T(g)T(f)x = T(gf)x$. 此即证明了(vi)。

再证(v)。令 e_n 如前，$x\in D(T(f)+T(g))$，由第四章定理 6.1 知

$$\lim_{n\to\infty} T((f+g)\chi_{e_n})x$$
$$= \lim_{n\to\infty}[T(f\chi_{e_n})x + T(g\chi_{e_n})x]$$
$$= T(f)x + T(g)x.$$

于是 $x\in D(T(f+g))$ 且 $T(f+g)x = T(f)x + T(g)$.反之，若 $x\in D(T(f+g))\cap D(T(g))$，则

$$\lim_{n\to\infty} T(g\chi_{e_n})x = \lim_{n\to\infty} T(f+g)\chi_{e_n} - f\chi_{e_n})x$$
$$= \lim_{n\to\infty}[T((f+g)\chi_{e_n})x - T(f\chi_{e_n})x]$$
$$= T(f+g)x - T(f)x.$$

于是 $x\in D(T(g))$，且

$$D(T(f)+T(g)) = D(T(f))\cap D(T(g)).$$

次证(viii).设$E(f^{-1}(0)\neq 0$，存在$x\neq 0$，使$E(f^{-1}(0))x = x$，由定义 2.2，$x\in D(T(f))$ 且 $T(f)x = 0$，从而 $T(f)$ 无

逆。反之，若 $E(f^{-1}(0))=0$，则 $1/f$ 是 E-几乎处处定义的，且 Σ-可测的。由(vi)，

$$D(T(f)T(1/f))=D(T(1/f)),$$
$$D(T(1/f)T(f))=D(T(f)),$$
$$T(f)T(1/f)x=x,\quad x\in D(T(1/f)).$$
$$T(1/f)T(f)x=x,\quad x\in D(T(f)).$$

这证明了 $T(f)$ 与 $T(1/f)$ 是单映射，并且

$$R(T(f))\subseteq D(T(1/f)).$$

若 $x\in D(T(f))$，则 $x=T(1/f)T(f)x$。于是 $x\in R(T(1/f))$。这样 $R(T(1/f))=D(T(f))$，类似 $R(T(f))=D(T(1/f))$。(viii)证毕。

最后证明(ix)。令 $x\in D(T(f))$，$x^*\in X^*$，又令

$$\|E(e)\|\leqslant M,\ 对一切\ e\in\Sigma.$$

则对 e_n 的任意子集 e，

$$\left\|\int_e f(s)x^*E(ds)x\right\|=\|x^*E(e)T(f_n)x\|$$
$$=\|x^*E(e)T(f)x\|$$
$$\leqslant M\|x^*\|\|T(f)x\|.$$

这样

$$\int_{e_n}|f(s)|v(x^*E(\cdot)x,ds)\leqslant 4M\|x^*\|\|T(f)x\|,$$

其中 $v(x^*E(\cdot)x,ds)$ 表示测度 $x^*E(\cdot)x$ 的全变差。令 $n\to\infty$，可见 f 是 $x^*E(\cdot)x$-可积的，由 Lebesgue 控制收敛定理，

$$\int_S f(s)x^*E(ds)x=\lim_{n\to\infty}\int_{e_n}f(s)x^*E(ds)x$$
$$=\lim_{n\to\infty}x^*\left\{\int_{e_n}f(s)E(ds)\right\}x$$
$$=\lim_{n\to\infty}x^*T(f_n)x$$
$$=x^*T(f)x.$$

定义 2.3 令 $T\in C(X)$，若存在定义于 $\mathscr{B}$ 上可数可加的

谱测度 $E(\cdot)$，使在定义 2.2 之下有

$$T=T(f),\ \text{其中}\ f(\lambda)=\lambda,$$

则称 T 是标型谱算子，或简称标算子，称 $E(\cdot)$ 为 T 的单位分解。

命题 2.3 定义 2.3 意义下的标算子是定义 1.1 下的谱算子。此外，在定义 2.3 中的单位分解与定义1.1下的单位分解是一致的。

证明 令T及 $E(\cdot)$ 如定义2.3中定义的那样，由定义2.2，$D(T)\supseteq E(e)X$，$e\in\mathscr{B}$是有界的。由定理 2.2 之(vii)，$E(e)\cdot D(T)\subseteq D(T)$，且 $TE(e)x=E(e)Tx$，$x\in D(T)$。

令 $e\in\mathscr{B}$，$\lambda_0\notin\bar{e}$，$f(\lambda)=(\lambda_0-\lambda)^{-1}$，$\lambda\in e$；$f(\lambda)=0$。$\lambda\notin e$。由定理 2.2，$T(f)$是处处定义有界算子，而且

$$T(f)(\lambda_0I-T)x=E(e)x,\ x\in D(T),$$

$$(\lambda_0I-T)T(f)x=E(e)x,\ x\in X.$$

此外，$E(e)T(f)=T(f)E(e)$。由此可见

$$T(f)|E(e)X=[(\lambda_0I-T)|E(e)X]^{-1}.$$

这样 T 与 $E(\cdot)$满足定义 1.1 中的要求。

推论 标算子的单位分解是唯一的。

定义 2.4 设 f 是 $\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ 的Borel可测函数，$T\in C(X)$是标算子，令 $f(T)$表示定义 2.2中的算子 $T(f)$，定义 2.2 中单位分解就取为 T 的单位分解。

由推论知这一定义是合理的。我们还进一步证明下面的命题。

命题 2.4 设 $T\in C(X)$是标算子，$E(\cdot)$ 是其单位分解，4 U 是开集且 $E(U)=I$，f 在 U 上解析，则定义 2.1 与定义 . 的 $f(T)$一致。

证明 令 $f_1(T)$与 $f_2(T)$分别表示定义 2.1 与定义 2.4 中的 $f(T)$。令 $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 U 的紧子集的渐升列，且 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}e_n=U$

由定理 2.2，

$$Tx=\int_{e_n}\lambda E(d\lambda)x,\ x\in E(e_n)X.$$

由定义2.3，$T|E(e_n)X$是有界标算子，它的单位分解 $F(e)=E(e\cap e_n)|E(e_n)X$。因为 $\sigma(T|E(e_n)X)\subseteq\bar{e}_n$，又 f 在 e_n上解析，由第四章定理 6.1 知

$$f(T|E(e_n)X)=\int_{e_n}f(\lambda)F(d\lambda).$$

从而

$$f(T|E(e_n)X)E(e_n)x=\int_{e_n}f(\lambda)E(d\lambda)x,\ x\in X.$$

由定理 2.2，

$$f(T|E(e_n)X)E(e_n)x=f_2(T)E(e_n)x.$$

令 $x\in D(f_1(T))$，由定义 2.1 及上述公式，

$$f_1(T)x=\lim_{n\to\infty}f_2(T)E(e_n)x.$$

因为 $\lim\limits_{n\to\infty}E(e_n)x=x$，由定理 2.2，$f_2(T)$是闭的，所以

$$x\in D(f_2(T)),\ 且 f_1(T)x=f_2(T)x,$$

这证明了 $f_1(T)\subseteq f_2(T)$。

令 $\sigma_n=\{\lambda\,|\,|f(\lambda)|\leqslant n\}$，$x\in E(\sigma_m)X$。由定理 2.2 及上述证明，

$$f(T|E(e_n)X)E(e_n)x=\int_{e_n}f(\lambda)E(d\lambda)x$$

$$=E(e_n)\int_{\sigma_m}f(\lambda)E(d\lambda)x$$

$$=E(e_n)f_2(T)x.$$

从而

$$\lim_{n\to\infty}f(T|E(e_n)X)E(e_n)x=f_1(T)x$$

存在，并且等于 $f_2(T)x$。由定理 2.2，对 $x\in D(f_2(T))$，

$$f_1(T)E(\sigma_m)x=f_2(T)E(\sigma_m)x=E(\sigma_m)f_2(T)x,$$

从而

$$\lim_{m\to\infty}f_1(T)E(\sigma_m)x=f_2(T)x。$$

再由定理 2.1 及 $\lim\limits_{m\to\infty}E(\sigma_m)x=x$ 和 $f_1(T)$ 是闭的可知 $x\in D(f_1(T))$，且 $f_1(T)x=f_2(T)x$。这说明 $f_2(T)\subseteq f_1(T)$。

命题 2.5 设 Σ 是集 S 的子集的 σ-域，$E(\cdot)$ 是定义于 Σ 上可数可加的单位分解，f 是 S 上 Σ-可测函数，则定义 2.2 中的算子 $T(f)$ 是标算子，它的单位分解为

$$E_1(e)=E(f^{-1}(e)),\quad e\in\Sigma。$$

证明 令 $f_n(s)=f(s)$，当 $|f(s)|\leqslant n$；$f_n(s)=0$，当 $|f(s)|>n$。则

$$D(T(f))=\{x\,|\lim_{n\to\infty}T(f_n)x\ 存在\},$$

$$T(f)x=\lim_{n\to\infty}T(f_n)x,\quad x\in D(T(f))。$$

由定义 2.3 与命题 2.3 及其推论，我们只须去证明

$$D(T(f))=\{x\,|\lim_{n\to\infty}\int_{|\lambda|\leqslant n}\lambda E_1(d\lambda)x\ 存在\},$$

$$T(f)x=\lim_{n\to\infty}\int_{|\lambda|\leqslant n}\lambda E_1(d\lambda)x,\quad x\in D(T(f))。$$

由于

$$T(f_n)=\int_{|\lambda|\leqslant n}\lambda E_1(d\lambda)。$$

所需结论可由此推出。

定理 2.3 设 $T\in C(X)$ 是谱算子，$E(\cdot)$ 是其单位分解，设除 $\sigma(T)$ 中有限个点及无穷远点外，$f(\lambda)$ 是在 U 上解析的，而且这些例外点至多是孤立极点，又设对这些例外点 P 有 $E(p)=0$；则 $f(T)$ 是谱算子，其单位分解 $E_1(e)=E(f^{-1}(e))$，并且 $\sigma(f(T))=\overline{f(\sigma(T))}$。

证明 令 $E_1(e)=E(f^{-1}(e))$，由定理 2.1，

$$E_1(e)D(f(T))\subseteq D(f(T)),$$

且

$$f(T)E_1(e)x=E_1(e)f(T)x,\ x\in D(f(T)).$$

令 $e\in\mathscr{B}$有界，先验证定义 1.1 之(i)，即证明

$$D(f(T))\supseteq E_1(e)X.$$

若 f 在无穷远处不解析，则 $e_1=f^{-1}(e)$ 是有界的，由定理2.1之(ii)，$D(f(T))\supseteq E_1(e)X=E(e_1)X$. 现设 f 在无穷远处解析，易见 f 在 $\bar{e}_1\cap\sigma(T)$附近解析。因为

$$\sigma(T|E_1(e)X)=\sigma(T|E(e_1)X)\subseteq\bar{e}_1\cap\sigma(T),$$

由命题 1.4，这表示 f 在 $\sigma(T|E_1(e)X)$ 及无穷远处解析，因此由定理 2.1 之(iv)，

$$D(f(T)|E_1(e)X))=D(f(T|E(e_1)X))\supseteq E(e_1)X,$$

由定理 2.1 之(ii)，$D(f(T))\supseteq E_1(e)X$.

于是，要证定理的前两个结论，只须证明，对每个$e\in\mathscr{B}$，$\sigma(f(T|E_1(e)X)\subseteq\bar{e}$，或者由定理 2.1 之(ii)，只须证明

$$\sigma(f(T)|E(e_1)X)\subseteq\overline{f(e_1)}.$$

因为 $T|E(e_1)X$ 是谱算子，$\sigma(T|E(e_1)X)\subseteq\bar{e}_1$，因此我们去证明对任何谱算子$A$及定理中函数 f，皆有 $\sigma(f(A))\subseteq\overline{f(\sigma(A))}$. 令 $\lambda\notin\overline{f(\sigma(A))}$. 不失一般性，令 $\lambda=0$，这时需证明 $\lambda\notin\sigma(f(A))$，或者证明 $f(A)$ 有有界逆。

由命题 1.3，$E(A,(\sigma(A))=I$. 因此，若 $\sigma(A)$ 有界，则由命题 1.2，A 有界。因为 $1/f$ 在$\sigma(A)$上有界，且仅在 $\sigma(A)$ 内有极点，因此 $1/f$ 在 $\sigma(A)$上解析。故从有界算子的Dunford 函数演算，$f(A)$有有界逆$(1/f)(A)$.

现设$\sigma(A)$无界. 由定理2.1之(iii)，$f(A)$有逆$(1/f)(A)$. 因为$0\notin\overline{f(\sigma(A))}$，按假设 $1/f$ 在 $\sigma(A)$ 上有界。这样$1/f$ 在 $\sigma(A)$ 及无穷远处是解析的。由定理 2.1 之 (iv) 可知 $(1/f)(A)$ 是有界的。这证明了定理前两个结论，并且证明了

$\sigma(f(T))\subseteq f(\sigma(T))$.

由 $\sigma(f(T))$ 是闭的，为证相反包含关系，只须证明 $\sigma(f(T))\supseteq f(\sigma(T))$。令 $\lambda\in f(\sigma(T))$，可认为$\lambda=0$。又令

$$Z=\{\lambda|\lambda\in\sigma(T)\text{且}f(\lambda)=0\}.$$

因为 $f(\lambda)$ 在 $\sigma(T)$ 上除∞可能是极点外是解析的，故Z 是一个有限点集，因此是有界集。令 e 是 Z 的邻域，其紧致闭包包含于 f 的解析区域内。由定理 2.1 之(ii)及命题 1.4，$T|E(e)X$ 是有界算子，而且 $Z\subseteq\sigma(T|E(e)X)$。从有界算子的谱映射定理，定理 2.1 之(i)，(ii)以及命题 1.4 的推论，可得

$$0\in\sigma(f(T|E(e)X))=\sigma(f(T)|E(e)X)\subseteq\sigma(f(T)).$$

推论 设 $T\in C(X)$是谱算子，p 是多项式，则 $p(T)\in C(X)$ 是谱算子。

命题 2.6 设 $\lambda\in\rho(T)$，则 T 是谱算子当且仅当 $R(\lambda,T)$ 是谱算子且 $R(\lambda,T)$的谱测度 $E_1(\{0\})=0$。

证明 设 $T\in C(X)$是谱算子，由定理 2.1 及定理 2.3，$R(\lambda,T)$是谱算子，且其谱测度 $E_1(\cdot)$满足

$$E_1(\{0\})=E(\{\mu|(\lambda-\mu)^{-1}=0\})=0.$$

反之，设 $R(\lambda,T)$ 是谱算子，且其谱测度 $E_1(\{0\})=0$，由定理 2.1 及定理 2.3，

$$(\lambda I-T)=R(\lambda,T)^{-1}$$

是谱算子，因此 T 是谱算子。

定义 2.5 设 $T\in C(X)$是谱算子，$E(\cdot)$ 是其单位分解，则称算子 S：

$$D(s)=\{x|\lim_{n\to\infty}\int_{|\lambda|\leq n}\lambda E(d\lambda)x\text{存在}\},$$

$$Sx=\lim_{n\to\infty}\int_{|\lambda|\leq n}\lambda E(d\lambda)x,\ x\in D(S).$$

是 T 的标部。

定理 2.4 设$S\in C(X)$是标算子，$E(\cdot)$是它的单位分解，

$N \in \mathscr{B}(X)$，$NE(e)=E(e)N$，$e \in \mathscr{B}$. 又设算子$N|E(e)X$，e有界，是拟幂零算子，则$S+N$是谱算子，其单位分解是$E(\cdot)$.

证明 显然$S+N \in C(X)$，若σ有界，则$E(\sigma)X \subseteq D(T)$，并且$E(\sigma)T \subseteq TE(\sigma)$，$\sigma \in \mathscr{B}$. 由定义1.1，为证明定理，只须证明，

$$\sigma(T|E(e)X) \subseteq \bar{e}, \quad e \in \mathscr{B}.$$

若$\lambda \notin \bar{e}$，则算子

$$M = N\int_e (\lambda-\mu)^{-1}E(d\mu)$$

是拟幂零算子. 事实上，令$\varepsilon>0$，$e_1 \subseteq e$是有界Borel集，使之

$$\|N\| |\lambda-\mu|^{-1} < \varepsilon, \quad 对\ \mu \in e \setminus e_1.$$

于是

$$M = (N|E(e_1)X)\int_{e_1}(\lambda-\mu)^{-1}E(d\mu)$$

$$+ N\int_{e/e1} (\lambda-\mu)^{-1}E(d\mu).$$

因为N与$E(\cdot)$可交换，由定理2.2，

$$M^n = (N|E(e_1)X)^n\int_{e_1}(\lambda-\mu)^{-n}E(d\mu)$$

$$+ N^n\int_{e\setminus e_1} (\lambda-\mu)^{-n}E(d\mu), \qquad n \geqslant 1.$$

因为$N|E(e_1)X$是拟幂零的，由定理2.2之(iii)，

$$\limsup_{n\to\infty}\|M^n\|^{\frac{1}{n}} \leqslant \limsup_{n\to\infty}\|N\|\left\|\int_{e\setminus e_1}(\lambda-\mu)^{-n})\,E(d\mu)\right\|^{\frac{1}{n}}.$$

$$\leqslant \|N\| \max_{\mu\in e\setminus e_1}|\lambda-\mu|^{-1}$$

$$< \varepsilon.$$

因为 $\varepsilon>0$ 是任意的，故可知 M 是拟幂零算子。令

$$R=\sum_{n=0}^{\infty}M^{n}\int_{e}(\lambda-\mu)^{-1}E(d\mu).$$

由定理 2.2 之(iii)，R 是有界的. 若 $x\in D(T|E(e)X)$，由定理 2.2 及 N 与 $E(\cdot)$ 的交换性，我们有

$$R\cdot(\lambda I-S-N)x=\sum_{n=0}^{\infty}N^{n}\int_{e}(\lambda-\mu)^{-n}E(d\mu)x$$
$$-\sum_{n=0}^{\infty}N^{n+1}\int_{e}(\lambda-\mu)^{-n-1}E(d\mu)x$$
$$=x.$$

下面证明 $NS\subseteq SN$. 事实上，若极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_{|\mu|\leq n}\mu E(d\mu)x$ 存在，则极限

$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_{|\mu|\leq n}\mu E(d\mu)Nx=\lim_{n\to\infty}N\int\limits_{|\mu|\leq n}\mu E(d\mu)x$$

存在，且等于

$$N\lim_{n\to\infty}\int\limits_{|\mu|\leq n}\mu E(d\mu)x.$$

若 $x\in D(T|E(e)X)$，则由 $(\lambda I-T)$ 是闭的，

$$\lim_{k\to\infty}(\lambda I-S-N)\sum_{n=0}^{k}N^{n}\int_{e}(\lambda-\mu)^{-n-1}E(d\mu)x$$
$$=\lim_{k\to\infty}\left\{\sum_{n=0}^{k}N^{n}\int_{e}(\lambda-\mu)^{-n}E(d\mu)x\right.$$
$$\left.-\sum_{n=0}^{k}N^{n+1}\int_{e}(\lambda-\mu)^{-n-1}E(d\mu)x\right\}$$
$$=\lim_{k\to\infty}(x-M^{k+1}x)$$
$$=x.$$

因此 $Rx\in D(T)$，于是 $(\lambda I-S-N)Rx=x$，这证明了 $R|E(e)X=[(\lambda I-T)|E(e)X]^{-1}$. 从而 $\lambda\notin\sigma(T|E(e)X)$. 所以

$$\sigma(T|E(e)X)\subseteq\bar{e}.$$

定理 2.5 设 $T=S+N$,其中 S 是标算子,N 是有界拟幂零算子,且 S 与 N 可交换,令 $E(\cdot)$是 T 的单位分解,f 是在一与 $\sigma(T)$有正距离的邻域上有界的解析函数,则 $f(T)$是有界谱算子,而且

$$f(T)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{N^n}{n!}\int_{\sigma(T)}f^{(n)}(\lambda)E(d\lambda),$$

其中右端是在一致算子拓扑下收敛.

证明 令$U\supseteq\sigma(T)$,且 $\text{dist}(\partial U,\partial\sigma(T))\geqslant d\,(d>0)$,又令$|f(\lambda)|\leqslant M$,$\lambda\in U$. 若 $\lambda\in\sigma(T)$,则

$$f^{(n)}(\lambda)=\frac{n!}{2\pi i}\int_C f(\zeta)(\zeta-\lambda)^{-n-1}d\zeta,$$

此处 C 是中心为 λ,半径为$\frac{d}{2}$的圆. 于是

$$(n!)^{-1}|f^{(n)}(\lambda)|\leqslant M2^n d^{-n}.$$

由定理 2.2,

$$\|(n!)^{-1}\int_{\sigma(T)}f^{(n)}(\zeta)E(d\zeta)\|\leqslant 4MK2^n d^{-n}.$$

此处 $K=\sup\limits_{e}\|E(e)\|$. 因为$N$是拟幂零的,级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{N^n}{n!}\int_{\sigma(T)}f^{(n)}(\zeta)E(d\zeta)$$

一致收敛到有界算子 R. 令$\{e_m\}_{m=1}^{\infty}$是U的紧子集的渐升列,且$\bigcup\limits_{m=1}^{\infty}e_m=U$,则

$$T|E(e_m)X=S|E(e_m)X+N|E(e_m)X.$$

显然

$$S|E(e_m)X=\int_{e_m}\zeta F(d\zeta),$$

其中 $F(e)=E(e)|E(e_m)X$. 依据第四章定理 6.1,

$$f(T|E(e_m)X)x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(N|E(e_m)X)^n}{n!}\int_{e_m}f^{(n)}(\zeta)F(d\zeta)x$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(N|E(e_m)X)^n}{n!}\int_{e_m}f^{(n)}(\zeta)E(d\zeta)x,$$

$$x\in E(e_m)X$$

又N与$E(\cdot)$可交换，由定理1.1之推论2，

$$f(T|E(e_m)X)E(e_m)x$$

$$=E(e_m)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{N^n}{n!}\int_{\sigma(T)}f^{(n)}(\zeta)E(d\zeta)x$$

$$=E(e_m)Rx,\qquad x\in X,\ m\geqslant 1.$$

由定义2.2，$f(T)$对一切$x\in X$有定义，且$f(T)=R$。

§3 闭谱算子的对偶理论

命题 3.1 设X^*为(OP)型空间，$\{E(\sigma);\ \sigma\in\mathscr{B}\}$是$X$上的谱测度，则$\{E^*(\sigma)|\sigma\in\mathscr{B}\}$是$X^*$上的谱测度。

证明 可直接验证$\{E^*(\sigma);\ \sigma\in\mathscr{B}\}$是$X^*$上的$X$-谱测度。仿第四章第一节的方法可证明

$$\sum_{i=1}^{n}|x^{**}E^*(\sigma_i)x^*|\leqslant 4M\|x^*\|\|x^{**}\|,\quad x^*\in X^*, x^{**}\in X^{**}$$

此处$\{\sigma_i\}_{i=1}^{n}$是$\mathcal{C}_\infty$中互不相交的Borel子集。

因为X^*是(OP)型空间，由第四章定理8.1及上述不等式可知，$\sum_{i=1}^{\infty}E^*(\sigma_i)x^*$是无条件收敛的。设

$$y^*=\sum_{i=1}^{\infty}E^*(\sigma_i)x^*.$$

又由于

$$\sum_{i=1}^{\infty}E^*(\sigma_i)x^*(x)=E^*\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty}\sigma_i\Big)x^*(x).$$

所以

$$y^*(x)=E^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}\sigma_i\right)x^*(x),\quad x\in X.$$

从而$y^*=E^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}\sigma_i\right)x^*$. 换言之，

$$\sum_{i=1}^{\infty}E^*(\sigma_i)x^*=E^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}\sigma_i\right)x^*,\quad x^*\in X^*,$$

即$\{E^*(\sigma);\ \sigma\in\mathscr{B}\}$是 X^* 上的谱测度.

命题 3.2 设 X^*为(OP)型空间，$T\in C(X)$是闭谱算子，则$T^*\in C(X^*)$ 是稠定义的.

证明 首先证明，若 σ_0 是有界的 Borel 子集，则对任何 $x^*\in X^*$，$E^*(\sigma_0)x^*\in D(T^*)$.

令 $x\in D(T)$，$x^*\in X^*$，由闭谱算子定义，

$$E^*(\sigma_0)x^*(Tx)=x^*(E(\sigma_0)Tx)=x^*(TE(\sigma_0)x).$$

另外. $TE(\sigma_0)$是 X 上的有界谱算子，故有 $y^*\in X^*$，使得

$$x^*(TE(\sigma_0)x)=y^*(x),\quad x\in D(T).$$

由共轭算子的定义，

$$E^*(\sigma_0)x^*\in D(T^*),\quad x^*\in X^*,$$

而且

$$T^*E^*(\sigma_0)x^*=y^*.$$

取 $\sigma_n=\{\lambda|\ |\lambda|\leqslant n\}\ (n=1,2,\cdots)$. 由上述讨论，对$x^*\in X^*$，

$$E^*(\sigma_n)x^*\in D(T^*)\quad (n=1,2,\cdots).$$

由命题 3.1，$\{E^*(\sigma);\ \sigma\in\mathscr{B}\}$是强可数可加谱测度，所以

$$x^*=\lim_{n\to\infty}E^*(\sigma_n)x^*,$$

即 $D(T^*)$在 X^* 中稠密. T^*当然是闭算子.

定理 3.1 设 $T\in C(X)$是闭谱算子，则 T^* 必是 X^* 内的闭谱算子当且仅当 X^* 为(OP)型空间.

证明 必要性是明显的. 事实上，X 上的有界谱算子亦是

X 内闭谱算子，因此由第四章定理 8.3 便知，X^* 必为(OP)型空间。

充分性。设 $\{E(\sigma);\ \sigma\in\mathscr{B}\}$ 是 T 的单位分解。由命题 3.1，$\{E^*(\sigma),\sigma\in\mathscr{B}\}$ 是X^*上的谱测度。由命题3.2，$T^*\in C(X^*)$，是稠定义的，而且$D(T^*)$包含有子空间

$$X_0^*=\{x^*\,|\,x^*=E^*(\sigma_0)x^*,\ \sigma_0\text{ 是有界 Borel 集}\}.$$

下面将验证满足闭谱算子定义 1.1 之(ii)与(iii)。

令 $\sigma\in\mathscr{B}$，$x\in D(T)$，$x^*\in D(T^*)$。因为

$$E^*(\sigma)x^*(Tx)=x^*(E(\sigma)Tx),$$

T 是闭谱算子，由定义 1.1，

$$E(\sigma)x\in D(T),\ E(\sigma)Tx=TE(\sigma)x,$$

因而

$$E^*(\sigma)x^*(Tx)=x^*(TE(\sigma)x)$$

又因为 $x^*\in D(T^*)$，因此

$$T^*x^*\in X^*,$$

$$x^*(TE(\sigma)x)=T^*x^*(E(\sigma)x)=E^*(\sigma)T^*x^*(x).$$

这样

$$E^*(\sigma)x^*(Tx)=E^*(\sigma)T^*x^*(x),\ x\in D(T),\ x^*\in D(T^*).$$

由共轭算子的定义，

$$E^*(\sigma)x^*\in D(T^*),\ \sigma\in\mathscr{B},$$

而且对 $x^*\in D(T^*)$ 有

$$T^*E^*(\sigma)x^*(x)=E^*(\sigma)T^*x^*(x),\ x\in D(T).$$

由于 $D(T)$ 在 X 中稠密，所以对 $\sigma\in\mathscr{B}$

$$T^*E^*(\sigma)x^*=E^*(\sigma)T^*x^*,\ x^*\in D(T^*).$$

最后证明定义 1.1 的(iii)。令 $\lambda_0\notin\bar{\sigma}$。因为 T 是闭谱算子，故

$$\sigma(T\,|\,E(\sigma)X)\subseteq\bar{\sigma},$$

这样$(\lambda_0I-T)^{-1}E(\sigma)\in\mathscr{B}(X)$。令

$$\sigma_n=\{\lambda\,|\,|\lambda|\leqslant n\}\ (n=1,2,\cdots).$$

由命题 3.2，$(\lambda_0 I-T)E(\sigma)E(\sigma_n)$ 是定义在 X 上的闭算子，据闭图形定理，

$$(\lambda_0 I-T)E(\sigma)E(\sigma_n)\in\mathscr{B}(X).$$

令 $x\in D(T)$，$x^*\in D(T^*)$，于是

$$
\begin{aligned}
&(\lambda_0 I^*-T^*)E^*(\sigma)E^*(\sigma_n)[(\lambda_0 I-T)^{-1}E(\sigma)]^*x^*(x)\\
=&(\lambda_0 I^*-T^*)E^*(\sigma)E^*(\sigma_n)[(\lambda_0 I-T)^{-1}E(\sigma)]^*E^*(\sigma_n)x^*(x)\\
=&[(\lambda_0 I-T)E(\sigma)E(\sigma_n)]^*[(\lambda_0 I-T)^{-1}E(\sigma)]^*E^*(\sigma_n)x^*(x)\\
=&[(\lambda_0 I-T)^{-1}E(\sigma)(\lambda_0 I-T)E(\sigma)E(\sigma_n)]^*E^*(\sigma_n)x^*(x)\\
=&[E(\sigma)E(\sigma_n)]^*E^*(\sigma_n)x^*(x)\\
=&E^*(\sigma_n)E^*(\sigma)x^*(x).
\end{aligned}
$$

另一方面，

$$
\begin{aligned}
&[(\lambda_0 I-T)^{-1}E(\sigma)]^*(\lambda_0 I^*-T^*)E^*(\sigma)E^*(\sigma_n)x^*(x)\\
=&[(\lambda_0 I-T)^{-1}E(\sigma)]^*[(\lambda_0 I-T)E(\sigma)E(\sigma_n)]^*E^*(\sigma_n)x^*(x)\\
=&[(\lambda_0 I-T)E(\sigma)E(\sigma_n)(\lambda_0 I-T)^{-1}E(\sigma)]^*E^*(\sigma_n)x^*(x)\\
=&[E(\sigma)E(\sigma_n)]^*x^*(x)\\
=&E^*(\sigma_n)E^*(\sigma)x^*(x).
\end{aligned}
$$

因此

$$
\begin{aligned}
&(\lambda_0 I^*-T^*)E^*(\sigma)E^*(\sigma_n)[(\lambda_0 I-T)^{-1}E(\sigma)]^*x^*\\
=&[(\lambda_0 I-T)^{-1}E(\sigma)]^*(\lambda_0 I^*-T^*)E^*(\sigma)E^*(\sigma_n)x^*\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad (n=1,2,\cdots).
\end{aligned}
$$

因为

$$
\begin{aligned}
&E^*(\sigma)[(\lambda_0 I-T)^{-1}E(\sigma)]^*x^*\in D(T^*)\quad (n=1,2,\cdots)\\
&E^*(\sigma_n)[(\lambda_0 I-T)^{-1}E(\sigma)]^*x^*\to[(\lambda_0 I-T)^{-1}E(\sigma)]^*x^*\\
&\to E^*(\sigma)x^*\qquad\qquad (n\to\infty)
\end{aligned}
$$

而且

$$
\begin{aligned}
&(\lambda_0 I^*-T^*)E^*(\sigma)\{E^*(\sigma_n)[(\lambda_0 I-T)^{-1}E(\sigma)]^*x^*\}\\
&\qquad E^*(\sigma)x^*\qquad\qquad (n\to\infty)
\end{aligned}
$$

从 $(\lambda_0 I^*-T^*)E^*(\sigma)$ 是闭算子知，对 $x^*\in D(T^*)$，

$$(\lambda_0 I^*-T^*)E^*(\sigma)[(\lambda_0 I-T)^{-1}E(\sigma)]^*x^*=E^*(\sigma)x^*.$$

同样，对 $x^* \in D(T^*)$

$$[(\lambda_0 I-T)^{-1}E(\sigma)]^*(\lambda_0 I^*-T^*)E^*(\sigma)x^* = E^*(\sigma)x^*.$$

这说明，$\lambda_0 \notin \sigma(T^*|E^*(\sigma)X^*)$，故

$$\sigma(T^*|E^*(\sigma)X^*) \subseteq \bar{\sigma}.$$

综上所述，$T^* \in C(X^*)$ 是闭谱算子。

注　　记

无界谱算子理论是W. G. Bade[1]的工作，本章主要是属于他的。但是定理1.1属于孙善利的文章〔1〕。需指出，闭谱算子与有界谱算子之间关系，起初也是属于 W. G. Bade[1]，但证明有错误，作者在〔7〕中已举例指出，本章的命题2.6已作修正。谱算子理论已被 T. Ionescu[1] 推广到局部凸线性拓扑空间。最近王声望[1]、张奠宙[1]还引入介于谱算子与可分解算之间一类有界与无界的可单位分解算子。本章第三节内容属于作者，可见〔7〕。

参 考 文 献

一般专著

〔1〕 Dunford, N. and Schwartz, J. T. Linear Operators, Part I (1967), Part II (1967), Part III (1971), New York.

〔2〕 Colojoara, I. and Foias, C. Theory of Generalized Spectral Operators, Gordon & Breach, New York, 1968.

〔3〕 Dowson, H.R. Spectral Theory of Linear Operators, Academic Press, London, New York, 1978.

〔4〕 Erdelyi, I. and Lange, R. Spectral Decompositions on Banach Spaces, Springer-Verlag, New York, 1977.

文献索引

Albrecht, E.

〔1〕 On decomposable operators, Integral equations and Operator theory, 2 (1979), 1—10.

〔2〕 On two questions of I. Colojoară and C. Foias, manuscripta Math., 25 (1978), 1—15.

Apostol, C.

〔1〕 Theorie spectrală si calcul functional, Studii cerc. Math., 20 (1968), 635—668.

〔2〕 Root of decomposable operator-valued analytic functions, Rev. Roum. Math. Pures Appl., 13 (1968), 433—438.

〔3〕 Restrictions and quotients of decomposable operators in a Banach spaces, Rev. Roum. Math. Pures Appl., 13 (1968), 147—150

Bade, W. G.

〔1〕 Unbounded spectral operators, Pacific J. Math. 4 (1954), 373—392.

Bartle, R. G.

〔1〕 Some localizations of the spectral mapping theorem, Duke Math. J., 40 (1973), 651—660.

Berkson, E.

〔1〕 Prespectral operators, Illinois J. Math., 13 (1969), 291−319

Bessage, C.

〔1〕 On bases and unconditional convergence of series in Banach spaces, Stuia Math., 17 (1958), 151−174.

Colojoara, I.

〔1〕 Generalized spectral operators, Rev. Roum. Math. Pures Appl., 7 (1962), 459−465.

Dollinger, M. B.

〔1〕 Variation of local spectra, J. Math. Anal. Appl., 39 (1972), 324−339.

Dowson, H. R.

〔1〕 Restrictions of spectral operators, Proc. London Math. Soc., 15 (1965), 437−457.

Dunford, N.

〔1〕 Spectral operators, Pacific J. Math., 4 (1954), 321−354.

〔2〕 A survey of the theory of spectral operators, Bull. Amer. Math. Soc., 64 (1958), 217−274.

Erdelyi, I.

〔1〕 Unbounded operators with spectral capacities, J. Math. Anal. Appl., 52 (1975), 404−414.

Finch, J. K.

〔1〕 The single valued extension property on Banach spaces, Pacific. J. Math., 85 (1975), 61−63.

Fixman, U.

〔1〕 Problems in spectral operators, Pacific J. Math., 9 (1959), 1029−1051.

Foguel, S. R.

〔1〕 Sums and products of commuting spectral operators, Ark. Mat., 3 (1958), 449−461.

〔2〕 The relations between a spectral operator and its scalar part, Pacific J. Math., 8 (1958), 51−65.

Foias, C.

〔1〕 Spectral maximal spaces and decomposable operators in Banach spaces, Arch. Math. (Basel), 14 (1963), 341−349.

〔2〕 The Riesz—Dunford functional calculus with decomposable operators, Rev. Roum. Math. Pures Appl., 12(1967), 627—641.

〔3〕 Spectral capacities and decomposable operators, Rev. Roum Math. Pures Appl., 13 (1968), 1539—1545.

Frunza, S.

〔1〕 The single-valued extension property for coinduced operators, Rev. Roum. Math.Pures Appl., 18 (1973), 1061—1065.

〔2〕 A duality theorem for decomposable operators, Rev. Roum. Math. Pures Appl., 16 (1971), 1055—1058.

Fuglede, B.

〔1〕 A commutativity theory for normal operators, Proc, Nat. Acad. Sci. U. S. A., 36 (1950), 35—40.

Ionescu, T.

〔1〕 Spectral operators on locally convex spaces, Bull. Amer. Math, Soc., 67 (1971), 125—128.

Jafarian, A. A.

〔1〕 A characterization of 2-decomposable operators, Rev. Roum Math. Pures Appl., 19 (1974), 657—663.

〔2〕 Some results on $\mathcal{K}$-unitary, $\mathcal{K}$-selfadjoint and decomposable operators, Indiana Univ. Math. J., 23 (1974), 957—979.

Kakutaini, S.

〔1〕 An example concerning uniform boundedness of speetral measures, Pacific J. Math., 4 (1954), 363—372.

Kariotis, C. A.

〔1〕 见Bartle〔1〕. R. G.

Lange, R.

〔1〕 equivalent covditions for decomposable operators, Proc. Amer.Math.Soc., 82(1981), 401—406

〔2〕 On generalization of decomposability, Glasgow Math.J., 22 (1981), 77—81.

Nagy, B.

〔1〕 Operators with spectral decomposition property are decomposable, Stu. Sci. Math. Hungar., 13 (1978), 429—432.

〔2〕 Characterizations of spectral operators, Arch., Math., 32 (1979)

289—294.

〔3〕 The spectral residuum for each closed operators, Topics in Modern Operator Theory, Vol. 2, Birkhauser.

Nagy, B. S.

〔1〕 On uniformly bounded linear transformations in Hilbert Space, Acta Sci. Math. (Szeged), 11 (1947), 152—157.

Oberai, K. K.

〔1〕 见Dollinger, M. B.〔1〕.

Pełczynski, A.

〔1〕 见Bessge, C.〔1〕.

Pettis, B. J.

〔1〕 On integration in vector spaces, Trans. Amer. Math. Soc., 44 (1938), 277—304.

Plafker, S.

〔1〕 Decomposable operators, Proc. Amer. Math. Soc., 24 (1970), 215—216.

Radjabalipour, M.

〔1〕 Equivalence of decomposable and 2-decomposable operators, Pacific J. Math., 77 (1978), 243—247.

Sine, R. C.

〔1〕 Spectral decomposition of a class of operators, Pacific J. Math., 14 (1964), 333—352.

Vasilescu, F.-H.

〔1〕 On decomposability in Banach spaces, Rev. Roum. Math. Pures Appl., 19 (1974), 1261—1266.

〔2〕 见 A. A. Jafarian〔1〕.

Wadhwa, B. L.

〔1〕 Decomposable and spectral operators on Hilbert spaces, Proc. Amer. Math. Soc., 40 (1973), 112—114.

Wermer, J.

〔1〕 Commuting spectral operators on Hilbert space, Pacific J. Math., 4(1954), 355—361.

江泽坚、邹承祖

〔1〕 关于谱型算子，吉林大学自然科学学报，1(1964),65—75.

邹承祖
〔1〕 单值扩张性与移位算子，吉林大学自然科学学报，1(1981),31－37.
〔2〕 一类算子的谱理论(Ⅰ)，吉林大学自然科学学报，4(1979),29－42.
〔3〕 一类算子的谱理论(Ⅱ)，吉林大学自然科学学报，2(1980),7－18.
〔4〕 Frunza猜想与强可分解算子，数学学报（外文版），1(1985),41－46.
〔5〕 可分解算子的谱容度，数学年刊，A1(1983),71－78.
〔6〕 关于I．Erdelyi的强谱容度，吉林大学自然科学学报，2(1982),8－10.
〔7〕 关于无界谱型算子的注记，吉林大学自然科学学报，3(1984),31－37.
俞致寿
〔1〕 可分解算子与谱算子，吉林大学自然科学学报，3(1980),56－60.
王声望
〔1〕 局部预解式与可单位分解算子，科学通报，23(1980),1102.
王声望、邹承祖、孙善利
〔1〕 可分解算子的某些性质，数学研究与评论，2(1982),31－34.
孙善利、邹承祖
〔1〕 拟相似性与谱，吉林大学自然科学学报，3(1984),15－18.
孙善利
〔1〕 无界可分解算子，吉林大学自然科学学报，1(1982),53－65.
〔2〕 无界可分解算子的对偶定理，数学年刊，A1(1984),49－54.
〔3〕 关于可分解算子对偶定理的注记，吉林大学数学所研究报告.
〔4〕 SDP 算子和可分解算子等价的新证明，吉林大学自然科学学报，4(1983),9－12.
孙善利、许凤
〔1〕 无界可分解算子的函数演算，吉林大学自然科学学报，3(1982),42－50.
张奠宙、王漱石
〔1〕 无界可单位分解算子，华东师大学报（自然科学版），4(1981), 5－11.
王漱石
〔1〕 封闭可分解算子，华东师大学报（自然科学版），3(1981),15－24.
侯学章
〔1〕 有可分解谱的无界算子，东北师大自然科学学报，4(1982), 1－15.
许 凤、邹承祖
〔1〕 关于射影算子的Bool代数，东北师大自然科学学报，1(1982),17－22.
程庆平、邹承祖
〔1〕 关于封闭商算子的可分解性，吉林大学自然科学学报，1（1985），34－51

[General Information]
□□=□□□□□□□□□□:□□□□□□□□□
□□=□□□□
□□=238
SS□=10069774
□□□□=

